Presentación

¿Crisis del fundamentismo?

Desde hace algunas décadas dominan en epistemología tendencias que, aunque divergentes en sus fines y métodos, comparten una oposición más o menos explícita al fundamentismo identificándolo con un proyecto caduco. Sin embargo, la búsqueda de principios ciertos desde los que pudiese reconstruirse o derivarse inferencialmente el conocimiento científico o alguna de sus ramas más importantes, que es como podríamos caracterizar en una primera aproximación a esta línea de pensamiento, obedeció al intento de responder a importantes cuestiones filosóficas. Es interesante preguntarse qué queda del fundamentismo, si puede considerarse superado o si es aún defendible en determinados dominios o en alguna de sus formas y, si no, qué resultados aportó a la discusión filosófica y cómo las modernas tendencias que pretenden reemplazarlo contestan a las viejas interrogantes que le dieron origen. Los artículos que contiene esta entrega de la revista **IZTAPALAPA**, resultado de un coloquio organizado por el área de Lógica y Filosofía de la Ciencia del Departamento de Filosofía de la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, celebrado en la Casa del Tiempo hace dos años, pretenden realizar un balance de lo que es o fue el fundamentismo.

En la primera mitad del siglo XX significativos proyectos de carácter fundamentista fracasaron según un consenso casi generalizado, que muchas veces incluyó la opinión de quienes los habían propuesto originalmente. Ejemplos notables de ello fueron los programas clásicos de fundamentación de las matemáticas o el emprendido por Carnap en "La construcción lógica del mundo", que intentaba reconstruir el lenguaje científico a partir del lenguaje primigenio de los datos sensibles. Estos programas determinaban la mayor certitud del dominio sobre el cual asentar el edificio del conocimiento (o de una de sus ramas) apelando a criterios de índole filosófica. Así, por ejemplo, las tres escuelas clásicas de fundamentación en matemáticas tenían como marco de referencia interpretaciones o variantes de la filosofía kantiana, mientras que Carnap, en el texto mencionado, persigue un proyecto que tiene su fuente de inspiración en el empirismo británico.[1] Aunque siempre pudieron ser interpretados como revisionistas, en el sentido en que esos principios filosóficos pudieron constituirse como normas externas desde las cuales juzgar la práctica científica, el carácter revisionista de una propuesta de fundamentación contó en su contra. Por ejemplo, el intuicionismo no gozó nunca de mucha popularidad por tratarse de un proyecto normativo que excluía de las matemáticas pruebas y teoremas ya consagrados. Por otro lado, un logicista podría haber interpretado el teorema de Gödel de 1931 mostrando que la lógica no es, después de todo, axiomatizable; o eliminando de las matemáticas todo aquello que rebasa el ámbito de la lógica. Frege mismo no fue un revisonista pues consideró el fracaso de su proyecto como una demostración de que la aritmética sí era, después de todo, sintética a priori.

Sin duda estos descalabros jugaron un papel importante en la casi total desaparición del fundamentismo en la escena moderna. Es conveniente preguntarse si el fracaso de estos proyectos no fue meramente accidental o, mejor aún, si hay algo equivocado en las pretensiones mismas del fundamentista y que es independiente del resultado de programas particulares.

Un primer problema que afronta el fundamentista es el del relativismo al cual puede confinarlo la elección de la base sobre la que asentará el edificio del conocimiento. Lo trataremos en los siguientes párrafos para después ilustrar otra dificultad que afrontó esta posición en el caso particular de las matemáticas.

[1] Así lo interpretó Quine en los pasajes en que se ocupa del *Aufbau* en "Two dogmas of empiricism". Que ésta es sólo una interpretación posible de uno de los proyectos de ese libro es mostrado por Alan Richardson en *Carnap's Construction of the World*, Cambridge University Press, 1998.

El relativismo

Podemos intentar contestar demandas incesantes de precisión en el significado de nuestros términos ofreciendo definiciones de ellos, pero esta estrategia termina, tarde o temprano, vía una regresión, con definiciones que emplean vocablos primitivos o sólo con definiciones circulares. De ahí que sea inevitable en todos nuestros conceptos un elemento de vaguedad semántica; en otras palabras, la precisión plena es una meta epistémica inalcanzable.

Análogamente podemos intentar dar respuesta a demandas incesantes de justificación racional de nuestras creencias o enunciados ofreciendo justificaciones argumentativas (o internalistas) de estos últimos, pero esta estrategia termina, tarde o temprano, vía una regresión, descansando en enunciados no justificados o bien en enunciados justificados sólo circularmente. De ahí que sea inevitable en todas nuestras justificaciones un elemento de dogmatismo fundacional; en otras palabras, la justificación argumentativa plena es una meta epistémica inalcanzable. La justificación argumentativa descansa en dogmas (presupuestos aceptados como correctos o verdaderos sin justificación no viciosamente circular; en última instancia, por un acto de fe) y este dogmatismo fundacional crea la posibilidad de un relativismo de fundamentos: tus fundamentos no son necesariamente los míos.

Pero acaso, ¿no hay escapatorias para esta conclusión? De hecho, hay al menos dos alternativas, no obstante, como discutiremos en un momento, no son apetecibles.

Primera alternativa: la estrategia negativista

En esta alternativa se argumenta que las creencias o enunciados racionales no requieren justificación positiva racional, que basta con criticarlos y que, si pasan las críticas, entonces son aceptados tentativamente como los mejores candidatos *pro temp* a ser verdaderos. Este racionalista,

> …está dispuesto a mantener cualquier posición *y considera todas sus posiciones, incluyendo sus estándares, objetivos y decisiones más fundamentales, así como su posición filosófica misma, abiertas a la crítica; que nada sustrae a la crítica justificándolo irracionalmente;* que nunca termina una argumentación recurriendo a la fe o a un compromiso irracional con la justificación de una creencia que ha estado bajo fuego crítico intenso; que no está comprometido, adherido o es adicto a ninguna posición.[2]

[2] W. W. Bartley, *The Retreat to Commitment*, La Salle, Open Court, 1984, 118; énfasis añadido.

Este racionalista pancrítico (RPC) *no justifica cosa alguna y presuntamente crítica todo,* incluso su propia actitud o posición racional, no está comprometido con posición alguna, ni siquiera con la creencia en el valor de la argumentación. Esto no significa que el RPC no tiene convicciones, sino más bien que está dispuesto a someterlas a examen crítico; sin embargo, conduce a una paradoja lógica. Considérese pues el siguiente argumento del mismo Bartley, inspirado por algunas objeción de J. F. Post,[3] que Bartley encuentra irrebatibles:

> (A) Todas las posiciones están abiertas a la crítica,
> y debido a la comprehensividad de RPC se sigue que
> (B) A está abierta a la crítica. Además,

puesto que (B) se sigue lógicamente de (A), cualquier crítica a (B) se aplicará a (A) y, por consiguiente, mostrará que (A) está abierta a la crítica. Dando por sentado que una crítica de (B) argumenta que (B) es falsa, entonces podemos argumentar: si (B) es falsa entonces (A) es falsa; pero un argumento que muestra que (A) es falsa (y de ese modo la critica) muestra que (B) es verdadera. Así, si (B) es falsa, entonces (B) es verdadera. Cualquier intento de criticar (B) prueba lógicamente (B); *por consiguiente, (B) es no criticable y (A) es falsa.*[4]

Por lo tanto, el RPC es refutado y esta conclusión es un producto de su índole autorreferencial –una teoría que pretende ser una teoría de todas las teorías, incluida ella misma– Bartley sostiene que la naturaleza paradójica del RPC puede ser tratada:

> ...por medio de soluciones como la distinción entre varios niveles del lenguaje, la de Zermelo, la categorial, la de exclusión definitiva de toda autorreferencia...[5]

Pero todo lo anterior es demasiado vago, meras *possibilia*.[6]

Debido al carácter paradójico del RPC (además de otras dificultades bien conocidas)[7] parece que la mejor opción, *malgré tout*, es el racionalismo de corte justificacionista –arriba esbozado– con su mínimo de irracionalismo y dogmatismo.

3 F. J. Post, "Paradox in critical rationalism and related theories", y "A godelian theorem for theories of rationality", ambos en G. Radnitzky y W. W. Bartley III, eds., *Evolutionary Epistemology, Rationality, and the Sociology of Knowledge,* La Salle, Open Court, 1987.

4 Bartley, op. cit., p. 224; énfasis nuestro.

5 Bartley, op. cit., pp. 219-220.

6 Para una discusión más detallada del racionalismo pancrítico y sus dificultades, consúltese: A. Cíntora, "Critical comments to Miller's defence of Bartley's pancritical rationalism", en *Ludus Vitalis*, vol. X, núm. 18.

7 Cf. por ejemplo, J. W. N. Watkins, "Comprehensively critical rationalism: A retrospect", en G. Radnitzky y W. W. Bartley III, eds., *Evolutionary Epistemology, Rationality, and the Sociology of Knowledge,* La Salle, Open Court, 1987.

Segunda alternativa: la estrategia confiabilista de corte externalista

Se podría argumentar que detrás de las dificultades mencionadas está la presunción de que la justificación sólo es argumentativa, i.e., una proposición sólo está justificada al inferirla –deductiva o inductivamente– de algunas premisas. Por tanto, si existen límites lógicos para la argumentación, entonces también habrá límites lógicos para la justificación. Se ha confinado ésta sólo a relaciones inferenciales entre proposiciones y se ha requerido que el creyente justificado o racional posea razones conscientes[8] para pensar que su creencia es verdadera.

En contraste, el confiabilista,[9] da también la bienvenida a justificaciones *no argumentativas, externalistas,* como las que provienen de algunos procesos psicológicos inconscientes. Se ha afirmado, por ejemplo, que las creencias causadas u originadas por procesos psicológicos generadores de verdad –claro, en un ambiente normal para la formación y transmisión de las mismas– están justificadas.

Para el *confiabilismo,* las creencias estarían justificadas incluso si el sujeto no estuviera consciente de los procesos mentales generadores y transmisores de creencias y –debido a esta inconsciencia acerca del *justificans*– el creyente, en general, no tendría razón alguna para pensar que sus creencias son verdaderas o cercanas a la verdad; y, sin embargo, éste tendría justificación para aceptarlas. Ejemplos de posibles procesos que serían *fuentes* confiables de creencias son la percepción, la memoria, el razonamiento y la intuición; mientras que ejemplos de procesos confiables inferenciales de verdades son la deducción o la inducción.

El confiabilista, sin embargo, se enfrenta a dificultades una vez que el escéptico demanda una justificación de la creencia en la confiabilidad de los supuestos procesos confiables. Esta justificación requerirá creencias generadas por otros supuestos procesos confiables; para detener la regresión, el confiabilista, igual que el internalista argumentativo antes que él, terminará con circularidad o dogmatismo, en este caso, en relación con la confiabilidad de ciertos procesos. El confiabilista podrá detener la regresión replicando que algunos de nuestros procesos cognoscitivos, tales como los inductivos, están autosustentados, y argumentando que otros de nuestros procesos cognoscitivos son apoyados por los procesos cognoscitivos autosustentables más básicos, o bien que nuestros procesos cognoscitivos se apoyan mutuamente (i.e., de manera circular) unos a otros. Por ejemplo, un componente

8 O, por lo menos, el creyente justificado debería tener sus creencias justificadas por razones que puedan hacerse conscientes –después de un adecuado autoexamen o reflexión–. Esto es, las razones justificatorias deben ser capaces de conscientizarse.

9 Para una discusión ulterior de esta doctrina naturalista consúltese A. Cíntora, "Scepticism and Naturalism", en *Sorites,* núm. 14, 2002 [disponible en www.sorites.net].

muy importante de la teoría confiabilista del conocimiento sería una lista de facultades confiables: percepción, memoria, introspección, inferencia, y quizá otras. Sin embargo, ¿cómo podría uno justificar el añadir una facultad a la lista excepto por el uso –directo o indirecto– de esa misma facultad? Tal vez podríamos evitar la circularidad viciosa permitiendo a una facultad ganar apoyo desde el uso de otras facultades. Pero éstas, a su vez, necesitarían soporte para sí mismas y ¿cómo lo obtendrían excepto por estar cada una respaldando a las demás? El confiabilismo es, de este modo, conducido a buscar *refugio en un círculo lo suficientemente amplio, el cual debe ser considerado como benigno, quizá en virtud de su gran diámetro.*[10]

Sin embargo, ambos argumentos, uno viciosamente circular de diámetro amplio y uno de extensión menor, son, por igual, lógicamente inaceptables; si existe alguna diferencia entre los dos círculos es sólo en su obviedad psicológica. El de diámetro más amplio podría ser considerado como *benigno* sólo porque su circularidad permanece oculta y porque su falta no es aparente: de ser éste el caso, lo cual aparece como una estrategia hipócrita, como un juego de simulación. Por ejemplo, asúmase que uno tiene la creencia *B* de que nuestra memoria ha sido, en general, confiable en la producción del proceso cognoscitivo. Ahora bien, si alguien preguntara por la justificación de *B*, podríamos responder que la creencia en *B* es generada por nuestros procesos cognoscitivos de memoria. Es decir, justificaríamos *B* invocando nuestra memoria –i.e., de modo circular– y sí, además, infiriéramos que nuestros procesos cognoscitivos de memoria probablemente continuarán siendo confiables, tendríamos que asumir que también nuestros procesos cognoscitivos inductivos son confiables.

Más aún, el confiabilista asume que una creencia *B* está justificada en el caso de que procesos cognoscitivos que generalmente son confiables produzcan *B* (o conduzcan a *B* desde otras creencias justificadas.) Ahora, si el confiabilista en turno va a defender su teoría de la justificación, podría argumentar como sigue:

1) La teoría confiabilista de la justificación epistémica está demostrada por procesos cognoscitivos confiables en cualquier situación, tales como el razonamiento y la imaginación, los cuales generan la teoría de la justificación confiabilista.
2) Sin embargo, es problemático argumentar que el razonamiento y la imaginación –alguna vez tomados como apoyo de nuestras intuiciones intelec-

[10] Ernest Sosa, "Nature unmirrored, epistemology naturalized", en *Knowledge in Perspective. Selected Essays in Epistemology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991, p. 95; énfasis nuestro.

> tuales más fuertes– sean por sí mismos y en general procesos cognoscitivos generadores de creencias confiables, dado que es casi un *cliché* que dichas instancias frecuentemente nos han conducido a teorías o creencias absurdas.

La segunda opción es que el confiabilista terminará con una explicación internalista argumentativa de su teoría de la justificación, misma que, por último, nos guiará de nuevo al trilema del escéptico: regresión al infinito, circularidad o dogmatismo.

Por estas razones muchos creen que no es posible escapar de las dificultades inherentes a la búsqueda de justificación argumentativa o internalista; así, J. Worrall[11] ha argumentado, por sólo mencionar un ejemplo, que un dogmatismo metodológico mínimo es lógicamente inevitable en la ciencia.

Las dificultades inherentes al fundamentismo en las matemáticas

Aún concediendo al fundametista el mínimo dogmatismo que requiere el desarrollo de su programa, éste encontró históricamente otra dificultad que podemos ilustrar en el caso de las matemáticas. El teorema de incompletud de Gödel constituyó un punto de inflexión en la reflexión filosófica sobre fundamentos de esta disciplina, pues mostró con nitidez que los problemas que habían encontrado logicistas y formalistas en el desarrollo de su programa no fueron accidentales, sino que se debieron a limitaciones esenciales de los sistemas formales. Si dejamos de lado el intuicionismo, que tuvo en contra, por otro lado, su carácter revisionista, podemos decir que Gödel puso fin al fundamentismo en matemáticas, al menos en su forma de principios del siglo pasado. Pero eso no significa que el fundamentismo no haya aportado importantísimos resultados que enriquecen ahora la discusión filosófica. Además, determinadas propuestas contemporáneas en filosofía de las matemáticas recuperan algunos de los objetivos de las escuelas fundamentistas clásicas, como veremos en lo que sigue.

Digamos en síntesis qué entenderemos por "fundamentismo" en el caso de la filosofía de las matemáticas, buscando el rasgo común a las tres escuelas o programas clasificadas tradicionalmente bajo este rubro. Adoptemos, con algunas salvedades, la definición de Shapiro:

[11] J. Worrall, "The value of a fixed methodology", en *British Journal for the Philosophy of Science*, núm. 39, 1988 y "Fix it and be damned: A reply to Laudan", en *British Journal for the Philosophy of Science* núm. 40, 1989.

> Como una primera aproximación, defino fundamentismo [*foundationalism*] como la opinión de que es posible y deseable reconstruir cada rama (legítima) de las matemáticas en una base completamente segura, una que sea máximamente inmune a la duda racional.[12]

Es importante notar la expresión "cada rama", para así excluir del fundamentismo el esfuerzo de los matemáticos por axiomatizar una vertiente particular de su disciplina. Nuestra reserva concierne en primer lugar a los objetivos reales de las escuelas fundamentistas, los cuales no siempre fueron de índole epistemológica, contra lo que sugiere la caracterización de Shapiro. Sin embargo, podemos reconstruir los proyectos intuicionista, logicista y formalista como respondiendo a un reto escéptico. Ningún problema hay para ello en el caso del intuicionismo, ni en el del formalismo, en la medida en que éste preconizaba el uso de métodos finitarios para las pruebas metamatemáticas de consistencia. En cuanto al logicismo, no parece que las preocupaciones de Frege fuesen de carácter epistemológico (aunque hay comentaristas que así lo interpretan). A pesar de ello, el logicismo, como programa matemático casi consumado, sirvió en la defensa de intereses epistemológicos. Así, por ejemplo, Carnap dice en su autobiografía haber aprendido de Frege cómo podía explicarse la certeza y generalidad de las matemáticas en el marco de la filosofía empirista.[13]

En segundo lugar, la definición de Shapiro tiene otro inconveniente. Enfocada en el aspecto epistemológico, destaca la estrepitosa bancarrota del fundamentismo y oculta sus importantes logros. En efecto, el logicismo y el formalismo se constituyeron, en buena medida, como continuaciones, en diferentes direcciones, del largo proceso de aritmetización del análisis y, dentro de tal empresa, contribuyeron enormemente al esclarecimiento de los conceptos matemáticos y de las diversas relaciones entre las disciplinas que conforman esta ciencia.

Hechas estas salvedades, adoptemos entonces la definición de Shapiro. Como mencionamos antes, el fundamentista tuvo que determinar, por consideraciones filosóficas, que un cierto terreno es seguro para reedificar sobre él el edificio completo de las matemáticas o de una de sus ramas. Ahora bien, su fracaso no consistió en que fuese incapaz de responder a un escéptico radical que aun pusiera en cuestión la certeza de ese bastión último, sino en que resultó imposible realizar sobre él el trabajo de fundamentación propuesto, sin caer en el revisionismo. En cuanto

[12] Stewart Shapiro, *Foundations without Foundationalism*, Oxford University Press, 1991, p. 25.

[13] "Autobiography", en Paul A. Schilpp, ed., *The Philosophy of Rudolf Carnap*, La Salle, Open Court, 1991 [1963], p. 47.

al programa de Hilbert y a la forma en que el teorema de Gödel incide en él, los artículos de Carlos Torres y Sílvio Pinto aquí incluidos dan una explicación muy detallada. Con respecto al logicismo, baste decir que Gödel mostró que las matemáticas clásicas no son una parte de la lógica, si por el término *lógica* entendemos un conjunto de verdades recursivamente enumerable.

Los fundamentos en la filosofía contemporánea de las matemáticas

Inspeccionemos ahora algunos programas contemporáneos ocupados con los fundamentos de las matemáticas y preguntémonos que queda en ellos de los objetivos y métodos del fundamentismo. Empecemos con dos propuestas que intentan determinar las relaciones entre lógica y matemáticas.

Como primer ejemplo consideremos el neofregeanismo, el cual surgió por un descubrimiento, realizado por Crispin Wright[14] hace un poco más de 20 años. En el parágrafo 68 de *Grundlagen der Arithmetik*, Frege define "número que pertenece al concepto *F*" como la extensión del concepto "equinumérico al concepto *F*" (siendo la relación de equinumerosidad entre conceptos definida en términos puramente lógicos de correspondencia 1-1). En §73 de ese mismo texto pretende demostrar el que ahora ha sido llamado "el principio de Hume", es decir, que el número que corresponde la concepto *F* es idéntico al número que corresponde al concepto *G*, si y sólo si *F* y *G* son equinuméricos. Frege prueba solamente que, si *F* y *G* son equinuméricos, entonces un concepto *H* es equinumérico a *F* si y sólo *H* es equinumérico a *G*. Ello supone que para demostrar que dos extensiones de conceptos son iguales es necesario y suficiente probar que esos conceptos subsumen exactamente los mismos objetos (o conceptos, si los conceptos de que partimos eran de nivel superior). Ahora bien, tal principio, junto con otros empleados por Frege (y más tarde aceptados como pertenecientes a la lógica de segundo orden), conducen a la paradoja de Russell.

Lo que Wright advirtió es que Frege no había empleado la inconsistente ley V de los *Grundgesetze* en ningún otro párrafo de los *Grundlagen*, para derivar los principios de la aritmética a partir de la lógica. Conjeturó además que el sistema que se obtiene de agregar el principio de Hume a los axiomas y reglas de inferencia de los *Grundgesetze*, y eliminar la ley V, es consistente. Esa conjetura fue probada

[14] Crispin Wright, "Frege's conception of number", en *Scots Philosophical Monographs*, vol. 2, 1983, Aberdeen University Press, Aberdeen.

poco tiempo después[15] y, desde entonces, la cuestión importante es si con ello pueden reivindicarse algunas de las pretensiones del logicista. Central a esta cuestión es la de si el principio de Hume es analítico (en el sentido de Frege); pero aun dándole una respuesta afirmativa, el neofregeano no puede considerarse logicista. Primero enfrentaría la objeción de que la lógica de segundo orden no es lógica, sino "teoría de conjuntos disfrazada", como pensaba Quine. En segundo lugar, se alejaría del logicismo tradicional en otro punto, pues todavía tendría que enfrentar el problema de la incompletud de la lógica de segundo orden, la cual es un corolario de los resultados de Gödel de 1931. Como ya dijimos, el objetivo de deducir todas las verdades matemáticas desde los principios de la lógica es inalcanzable, excepto que se empleen procedimientos de prueba no recursivos (en cuyo caso el objetivo epistemológico del programa se perdería). En ese trascendente sentido, no podría ser fundamentista. Sin embargo, la lógica de segundo orden aunada al principio de Hume goza de otro tipo de completud, como diremos más adelante, al menos porque permite caracterizar categóricamente el modelo estándar de la aritmética y desde él reconstruir deductivamente el análisis clásico.

Desde hace varios años Gabriel Sandu y Jaakko Hintikka han propuesto un sistema semántico y sintáctico para la interpretación y uso de los cuantificadores y conectivos lógicos al que han denominado "independence friendly logic" (o "IF logic"); este proyecto no podría calificarse de fundamentista, aunque se ocupa de los fundamentos. Según Hintikka se trata "la verdadera lógica básica"[16] o "nuestra verdadera lógica elemental"[17] y la aceptación de este punto de vista conlleva la ruptura total del marco conceptual en que ordinariamente son pensadas las relaciones entre lógica y matemáticas. La lógica IF es una extensión conservativa de la lógica clásica de primer orden, fundada en dos propuestas relativamente novedosas.

La primera, la más antigua, es una semántica para la interpretación de conectivos y cuantificadores en términos de teoría de juegos, y la segunda la posibilidad de eliminar en una fórmula un cuantificador existencial, o una disyunción, del alcance de un cuantificador universal que lo precede. Ilustremos brevemente la primera. Tomemos la fórmula $(\forall x)(\exists y)A(x,y) \wedge (\exists x)B(x)$ y una interpretación cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y para la cual $A(x,y)$ representa la relación $x<y$ y $B(x)$ la propiedad de primo. Hay dos jugadores, uno que

[15] Por Burgess, en la reseña del mencionado libro de Wright, aparecida en *The Philosophical Review*, núm.93, 1984, pp. 638-640. Claro está, se trata de una prueba de consistencia relativa.

[16] Jaakko Hintikka, *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge University Press, 1998, p. 74.

[17] Op. cit., p. 50.

intenta falsificar y otro que quiere verificar la fórmula. Al falsificador corresponde elegir un miembro de la conjunción y un número para el cuantificador universal, mientras que al verificador elige números para los cuantificadores existenciales. Así, si el falsificador elige la fórmula de la izquierda y el número 5 (para instanciar la variable *x*), el verificador pierde si escoge un número menor o igual que 5, y gana en otro caso. Los papeles se invierten cuando se llega a un símbolo de negación. Una fórmula es verdadera en una interpretación si hay una estrategia ganadora para el verificador y falsa si hay una para el falsificador, y ni verdadera ni falsa en otro caso.

La segunda idea innovadora que engendra la lógica IF también será ilustrada con un ejemplo. Aceptado el axioma de elección, cada fórmula de primer orden es equivalente a un enunciado de segundo orden de la forma Σ_1^1, que es una fórmula de primer orden a la cual han sido prefijados cuantificadores existenciales de segundo orden. Sin embargo, lo contrario es falso. Por ejemplo, el enunciado $(\exists f)(\exists g)(\forall x)(\forall z)A[x,f(x), z, g(z)]$ no parece, en general representable en primer orden porque el intento de reemplazar los cuantificadores funcionales por cuantificadores de primer orden no es compatible con su ordenamiento lineal. El cuantificador correspondiente a *f* debe preceder a $(\forall x)$ y seguir a $(\forall z)$ pues *f* representa una función de *x* y no de *z*, mientras que el cuantificador correspondiente a *g* debe preceder a $(\forall z)$ y seguir a $(\forall x)$, por razones similares, lo que es imposible. ¿Por qué habríamos de aceptar en lógica esta limitación en su capacidad expresiva? Se trata, en efecto, de una limitación innecesaria, si se acepta la semántica en términos de teoría de juegos. Hintikka sugiere una modificación de la sintaxis de la lógica clásica que permitiría escribir una fórmula de primer orden equivalente a la anterior. Consiste en la posibilidad de agregar a un cuantificador una diagonal concatenada con otro cuantificador precedente. Por ejemplo, la fórmula anterior, podría escribirse en el lenguaje de la lógica IF de la siguiente manera: $(\forall x)(\forall z)(\exists y/\forall z)(\exists u/\forall x)A(x,y,z,u)$, en donde la diagonal indica que el cuantificador existencial es independiente del universal escrito a continuación. Entonces, por ejemplo, la fórmula $(\forall x)(\exists u/\forall x)A(x,u)$ es equivalente a $(\exists u)(\forall x)A(x,u)$.

Dado que la cuantificación existencial puede ser interpretada en términos de una disyunción (si aceptamos disyunciones con un número infinito de miembros) resulta natural extender esta idea a la combinación de cuantificación universal y disyunción. Así la diagonal en $(\forall x)(Sx\ (v/\forall x)\ Tx)$ indica que la selección de *S* o *T* se hace independientemente de X, y por tanto la fórmula es equivalente a: $(\forall x)Sx \vee (\forall x)Tx$.

Ahora bien ¿cuáles son las ventajas de introducir estas modificaciones en la sintaxis y en la semántica de los lenguajes de primer orden? y ¿qué implicaciones tiene aceptar la lógica IF como la verdadera lógica en relación con las matemáticas?

Ya dijimos que la lógica IF es más expresiva que la lógica clásica de primer orden. La lógica IF cumple de manera más satisfactoria la que Hintikka llama "la función descriptiva de la lógica", la de proveer un lenguaje de paráfrasis para enunciados científicos y, en particular, matemáticos; asimismo, es una extensión conservativa de la lógica clásica de primer orden y "hereda" de ésta una serie de propiedades básicas (es decir, para ella son válidos teoremas como el de compacidad o el de Löwenhein-Skolem). Específicamente, cada enunciado de su lenguaje tiene una traducción en segundo orden de la forma Σ_1^1 y, viceversa,[18] lo cual permite superar, según Hintikka, otra de las grandes limitaciones de la lógica clásica, a saber, la imposibilidad de definir el predicado de verdad para un lenguaje en el interior de ese mismo lenguaje. En los lenguajes IF de primer orden esto no es válido.

Dado que la lógica IF puede alcanzar este objetivo, además de la simplicidad expresada en los teoremas que acabamos de mencionar y de que posee mayor poder expresivo, parece aventajar a la lógica clásica en algunas de las funciones atribuidas tradicionalmente a la lógica. Sin embargo, hay otras características de la lógica IF que también deben ser consideradas en su evaluación y que, al menos desde el punto de vista clásico, representan una lamentable pérdida de simplicidad, como el hecho de que la ley del tercero excluido no es válida en esta lógica.

Ahora bien, ¿la lógica IF podría ser un instrumento en la defensa de un programa logicista? Aun cuando aceptemos que ella es "la verdadera lógica de nuestro lenguaje", no podríamos reivindicar el programa logicista, porque obviamente enfrentaríamos el mismo problema que el neofregeano: la lógica IF tampoco es finitamente axiomatizable. Sin embargo, quien defiende esta lógica puede recuperar algunos de los ideales del antiguo logicismo. Un lenguaje para la lógica IF no sólo puede tratar su propia sintaxis, sino también su semántica y puede constituirse, en este sentido, como un lenguaje universal capaz de tratar los conceptos y modos de inferencia más característicos en matemáticas, tales como inducción matemática, infinitud, equicardinalidad, buen orden, etc. Aceptada la lógica IF como lógica, el pensamiento matemático no requiere esencialmente cuantificación sobre entidades de orden superior como clases o conjuntos. Respecto a la incompletud, tanto Hintikka como Shapiro distinguen varios casos. Lo que importa más es separar la axiomatibilidad de una lógica, de su completud descriptiva (con respecto a modelos dados). Ésta es una propiedad de un sistema axiomático no lógico T y consiste en que los modelos deseados de T son los únicos modelos. Si hay un solo modelo que se busca caracterizar, la completud descriptiva significa

[18] De tal manera que una fórmula de la lógica IF y su traducción en segundo orden son verdaderas en los mismos modelos, pero no falsas en los mismos modelos.

categoricidad de la teoría. El que el conjunto de enunciados verdadero de la lógica IF no sea recursivamente enumerable (y que sea, por tanto, semánticamente incompleta, según la clasificación de Hintikka) no impide a esta lógica ser descriptivamente completa con respecto, por ejemplo, a la aritmética elemental. En este sentido, y sólo en éste, podríamos decir que la lógica IF es un fundamento para las matemáticas. Es decir, no se trata de reducir las matemáticas a la lógica IF, sino de proveer un lenguaje capaz de tratar su propia semántica, de caracterizar de manera satisfactoria las estructuras que el matemático estudia y de expresar los conceptos y formas de razonamiento que éste emplea.

Veamos ahora dos filosofías de las matemáticas que se oponen radicalmente al fundamentismo.

Muchas veces una posición filosófica se destaca con más nitidez sobre el fondo de una postura contraria que contribuye, por su oposición, a esclarecer sus supuestos, sus objetivos y sus estrategias. En el caso que nos ocupa, un ejemplo, tal vez el más sobresaliente de ello, es la epistemología naturalizada, cuyos principios fueron formulados y, hasta cierto punto, puestos en práctica por Quine, en los años sesenta. Si bien señalada explícitamente en "Epistemología naturalizada"[19] como una nueva vía en epistemología, se encontraba anunciada y practicada ya en *Word and Object*. Con su formulación, Quine ofrece una metáfora emblemática: la del barco de Neurath que tiene que ser reparado y mejorado en alta mar, sin que haya nunca la posibilidad de llevarlo a tierra para componerlo o, incluso, destruirlo, si es necesario, y reconstruirlo de nuevo antes de embarcarse hacia nuevos rumbos. La metáfora es muy ilustrativa: no hay más suelo firme que la ciencia de nuestro tiempo y el filósofo no tiene más remedio que partir de ella, tal vez para modificarla después, pero usando los estándares y métodos propios de la actividad científica. Así, Quine, en su reconstrucción del aprendizaje de la lengua materna por un niño, no parte de los datos sensibles, como lo hicieron Russell o Carnap, sino de la estimulación de las terminaciones nerviosas y convierte el problema epistemológico en la explicación de cómo el ser humano, partiendo de una base tan débil, pudo construir las teorías científicas. En esta empresa, el epistemólogo puede auxiliarse de las mismas ciencias que intenta reconstruir o explicar, sin que por ello incurra en ninguna falta. La circularidad no será viciosa, sino virtuosa, porque el éxito de su empresa será evaluado por su capacidad para integrar en un todo coherente la propia explicación epistemológica dentro del cuerpo unificado de la ciencia.

[19] W. V. O. Quine, "Epistemology naturalized", en *Akten des XIV Internationalen Kongress für Philosophie* núm. 6, 1971, pp. 87-103.

Dos son las motivaciones centrales de Quine para defender esta posición. Una es el reconocimiento de la ciencia como la más rigurosa práctica productora de conocimiento y el respeto por sus métodos. Esto no significa, como dijimos, que el filósofo no pueda ser, en alguna medida, revisionista; podrá, al final, redondear la teoría científica eliminando, por ejemplo, inconsistencias de detalle que sólo sean perceptibles desde una perspectiva global, o proscribiendo o recomendando ciertas tendencias nacientes en la investigación (como lo hizo el propio Quine), pero no podrá hacerlo al inicio de su tarea, exactamente como el marinero no empezará por quitar una plancha de la quilla del barco que lo transporta en alta mar. Otra motivación, esta vez más personal, es que Quine había vivido muy de cerca el fracaso de dos ingentes proyectos fundamentistas: el del logicismo de Frege, Russell y Whitehead, y el emprendido por Carnap.

Para Quine, la matemática no comparte con la lógica un estatus distinto al de las ciencias empíricas, todas forman parte del cuerpo unificado del conocimiento científico, el cual está constituido por enunciados situados entre un núcleo central y una periferia, y que está directamente confrontada con la experiencia por su periferia solamente. Cuando una experiencia particular contradice una predicción, el científico se ve obligado modificar ciertos elementos de su teoría, pero no está determinado a hacerlo de una sola manera. En el centro de la red se encuentran los enunciados a los que el científico renunciaría con mayor reluctancia, tales como los de la lógica o los de las matemáticas, pues su remoción conllevaría demasiados cambios. Por otra parte, Quine propone el criterio ontológico: "entidades de un tipo dado son asumidas por una teoría si y sólo si algunas de ellas deben ser contadas entre los valores de sus variables para que los enunciados afirmados en la teoría sean verdaderos".[20] De ello, junto con el holismo semántico y la epistemología naturalizada, se llega a la siguiente conclusión: existen únicamente los objetos asumidos por nuestra mejor teoría científica del mundo. No tenemos mejores criterios para la justificación de enunciados existenciales que los provistos por la más rigurosa y exitosa práctica productora de enunciados verdaderos: la ciencia. Un corolario es que existen los objetos presupuestos por las disciplinas matemáticas indispensables para la elaboración de la ciencia aplicada.

Pero, en relación con los objetos matemáticos, eso plantea el siguiente problema: los criterios de existencia de objetos matemáticos no parecen considerar el efecto global que su postulación tiene sobre las ciencias naturales. Hay ramas de las matemáticas que están muy alejadas de toda experiencia posible, como la teoría

[20] W. V. O. Quine, *From a Logical Point of View*, Harvard University Press, segunda edición revisada, 1994, p. 103.

de los grandes cardinales, por ejemplo. Además existen teorías alternativas a aquellas utilizadas en las ciencias de la naturaleza, como fue el caso de las geometrías no euclidianas al final del siglo XIX. En cuanto a las primeras, Quine dice de sus enunciados:

> ...reconocemos tales enunciados como significativos porque ellos son construidos gramaticalmente del léxico que es también necesario en matemáticas aplicables. Su exclusión de lenguaje requeriría un excesivo reajuste de la gramática. ¿Cuáles de ellos retener como verdaderas, entonces, y cuáles como falsos? Esto puede aún ser establecido tentativamente, hasta un cierto punto, por consideraciones que también figuran familiarmente en el filo teórico de la ciencia natural: consideraciones de economía y simplicidad.[21]

En lo que se refiere a las segundas, Quine utiliza una concepción que llamaremos implicacionista, y que puede explicar de dos maneras equivalentes. La primera es la de no considerar las fórmulas cerradas de una teoría matemática T como enunciados. Es decir, no atribuirles ningún valor de verdad. Otra posibilidad es interpretar cada enunciado F de T como una expresión elíptica abreviando un enunciado de la forma $G \rightarrow F$ donde G representa una conjunción de axiomas de T. En particular, una teoría cuyos enunciados son todos condicionales no tiene compromisos ontológicos. Estas teorías serán desarrolladas, según esta concepción, por el interés de conocer la capacidad deductiva de ciertos grupos de axiomas y su eventual aplicación en las ciencias de la naturaleza.

Veamos un caso más de un programa ocupado con los fundamentos de las matemáticas, inspirado esta vez en la epistemología naturalizada. Nos referimos al esbozado por Penélope Maddy en su reciente libro *Naturalism in Mathematics*.[22] Para esta autora, la teoría de conjuntos provee el fundamento de las matemáticas tanto hay una forma de definir los objetos matemáticos en términos conjuntistas, de tal modo que las traducciones (realizadas según estas definiciones) de los teoremas matemáticos pueden ser probados en la teoría de conjuntos. No debemos extraer de ello, según Maddy, ni conclusiones ontológicas relativas a la naturaleza de los objetos matemáticos o a la inexistencia de algunos de ellos, ni consecuencias epistemológicas. La ventaja de esta "reducción" de las matemáticas a la teoría de conjuntos radica en que provee un terreno común en donde las diversas estructuras

[21] W. V. O. Quine, "Immanence and validity", en *Selected Logical Papers*, Harvard University Press, 1995 [1966], p. 243.

[22] Penélope Maddy, *Naturalism in Mathematics*, Oxford University Press, 1997.

matemáticas pueden ser modeladas para estudiar sus interrelaciones y susceptibles de constituirse como "una corte final de apelaciones para cuestiones de existencia matemática y prueba...". Uno de los problemas centrales en los fundamentos de las matemáticas será entonces el relativo a la justificación última de los axiomas de la teoría de los conjuntos y, muy particularmente, a los criterios con que podrían ser legitimados nuevos axiomas. Para ello Maddy precisa un método que aunque inspirado en Quine se opone a éste radicalmente.

Como vimos, una objeción que puede hacerse a la filosofía de las matemáticas de Quine es que los criterios de existencia de un objeto matemático, empleados efectivamente en la práctica de esta disciplina, parecen por completo independientes de posibles aplicaciones en las ciencias naturales. En concreto, Maddy pretende subsanar esta dificultad sin alejarse demasiado, según ella, de los principios quineanos. Para ello propone un naturalismo matemático:

> [J]uzgar la matemática desde un punto de vista privilegiado exterior a las matemáticas, digamos desde el punto de vista privilegiado de la física, me parece a mí que va contra el espíritu que subyace al naturalismo... lo que yo propongo aquí es un naturalismo matemático que extienda el mismo respeto a la práctica matemática que el naturalismo quineano extiende a la práctica científica... Donde Quine toma la ciencia como independiente de la filosofía primera, mi naturalismo toma las matemáticas como independiente tanto de la primera filosofía como de la ciencia natural.[23]

Este principio inspira un programa según el cual el filósofo debe observar con meticulosidad la práctica matemática, identificar sus objetivos y tendencias y, sobre todo, resistir cualquier tentación a filosofar. Su objetivo será modelar la práctica matemática para recomendar las elecciones que el matemático debe hacer cuando se encuentra en una encrucijada, como la que plantea la adopción de nuevos axiomas en la teoría de conjuntos, si quiere alcanzar los fines y continuar las tendencias que subyacen sus prácticas. Sin embargo, el naturalista en matemáticas nunca podrá ser revisionista. Desde luego, la clara formulación de este programa sugiere dificultades mayúsculas que Maddy no ignora, como la de trazar la delimitación entre ciencia y filosofía. Tal vez lo que mejor ayuda a la comprensión de su propuesta no sean tanto estas consideraciones abstractas, como la aplicación que ella misma realiza de su programa contra la adopción en teoría de conjuntos del axioma $V=L$. No entraremos en ello para no alargar demasiado esta presentación.

[23] Op. cit., p. 184.

Hemos expuesto algunos de los programas en boga que más pueden considerarse ocupados con el problema de los fundamentos de las matemáticas. No descubrimos en ello la preocupación epistemológica que subyace al fundamentismo según la definición de Shapiro. Tal vez una excepción a ello sería el intuicionismo, resurgido como escuela fundamentista en parte gracias a los escritos de Dummett. Nos limitamos a apuntarlo como una posible excepción a la regla. En los proyectos filosóficos examinados encontramos, en diversos puntos, varios de los objetivos o preocupaciones de algunas de las escuelas fundamentistas: la búsqueda de una lógica que provea un lenguaje universal para la ciencia, que, por lo tanto, comprendiera su propia semántica, y que fuera completa con respecto a las matemáticas en algún sentido (ahora se persigue la completitud descriptiva, antes la semántica y deductiva), o que se constituyera como "una corte final de apelaciones para cuestiones de existencia matemática y prueba..."; la búsqueda de un criterio para la elección de axiomas últimos, entre otros. Con todo, estos objetivos se encuentran separados unos de otros y desmembrados del proyecto fundamentista y sirven a nuevos designios filosóficos. Por otra parte, las propuestas inspiradas en la epistemología naturalizada renuncian definitivamente a estos ideales.

A la luz de estos desarrollos recientes vemos la profunda unidad que subyacía a las escuelas fundamentistas y que fue reconocida por sus abanderados en el congreso de Könisbgerg, donde Gödel anunció su célebre teorema de incompletud. Con éste se abrió, sin duda, una nueva etapa en filosofía de las matemáticas.

Cinco trabajos en este volumen de **IZTAPALAPA** se ocupan de lógica y fundamentos de las matemáticas. El de Juan José Rivaud, "La generalización y la formalización en matemáticas: el caso de las series", es una artículo muy ameno que sigue una tendencia que podría remontarse a Lakatos y seguir las directrices expuestas de Maddy: la de ocuparse, no en reconstrucciones artificiales del edificio de las matemáticas, sino en la observación cuidadosa de los patrones que parecen gobernar la práctica misma de esta disciplina. En lugar de atender excesivamente a la prueba, Rivaud sigue de cerca un proceso muy desatendido por las escuelas fundamentistas, a saber, el de la formación de conceptos matemáticos a través de los medios heurísticos que conducen al hallazgo de nuevos resultados y a su generalización y formalización.

En su colaboración, "Wittgenstein y el programa de Hilbert", Sílvio Pinto expone con mucha erudición el programa mencionado y la manera en que su autor sucumbe ante la aparición de los teoremas de incompletud de Kurt Gödel. Además ofrece una interpretación muy interesante de la filosofía de las matemáticas de Wittgenstein, sobre todo en lo que se refiere a los problemas de la búsqueda de pruebas de consistencia para sistemas axiomáticos y de la idea misma de fundamentar una teoría en otra. El pensamiento de Wittgenstein a este respecto fue muy original, pues mostró una perspectiva desde la cual las matemáticas no pueden ni deben ser fundamentadas.

Max Fernández de Castro en "La matemática como sintaxis" aborda el problema de cómo, ya demostrado el teorema de incompletud de Gödel, pudo sostener Carnap en 1933 que la matemática forma parte de la sintaxis y propone una interpretación novedosa según la cual el proyecto de Carnap con respecto a la matemática sería una síntesis sui generis (purificada de toda referencia "metafísica") de los programas logicista y formalista.

En su contribución titulada "La matemática, ¿requiere fundamentos?", Carlos Torres distingue varias acepciones de la palabra "fundamentar", para sostener que la matemática no requiere fundamentos, lo que no significa que no pueda darse una explicación del lugar que ocupa esta disciplina en el cuerpo del conocimiento humano, como una actividad condicionada por la historia. Ofrece también dos interpretaciones de la matemática, una inspirada en Gödel y conforme la cual ésta estudiaría relaciones objetivas entre conceptos, y otra la que hemos llamado "implicacionista", para defender que son equivalentes.

En cuanto al artículo de Raymundo Morado "Racionalidad y lógicas no deductivas", se ocupa de un problema distinto, pero muy ligado con los señalados, a saber, el de la lógica que subyace a nuestro concepto de racionalidad. El autor muestra con abundantes ejemplos cómo nuestro modelo ordinario de deducción, fundado en la lógica clásica, es demasiado rígido y exigente en relación con nuestras prácticas habituales de inferencia y da pie a un paradigma de racionalidad que deja fuera muchos patrones de comportamiento que parecen exitosos y racionales. Morado establece que las lógicas no deductivas pueden ser un poderoso auxiliar en la búsqueda de un modelo más laxo de racionalidad, más acorde con nuestras prácticas epistémicas, sin que ello impida que siga siendo normativo, según nuestras intuiciones de lo que es un modo racional de conducta.

Por otro lado, el ensayo de Luis de la Peña pasa revista a los presupuestos metafísicos de la mecánica cuántica y sostiene que la evidencia empírica es consistente con una ontología cuántica sin acción a distancia –es decir, local– y donde el comportamiento azaroso o indeterminista propio del mundo cuántico es explicable invocando un mundo subcuántico –el vacío fluctuante de la electrodinámica estocástica.

León Olivé, por su parte, defiende una forma de fundamentismo débil: la tesis de que hay conceptos empíricos primitivos. Tesis que, argumenta, es compatible con un pluralismo de marcos conceptuales y tradiciones. Luis Felipe Segura caracteriza y aclara la doctrina fundamentista, sus posibles consecuencias (relativismos varios, multiculturalismo, escepticismo) y sus posibles vínculos lógicos con otras doctrinas. A su vez, Jonatan García analiza un aspecto del debate entre fundamentistas y coherentistas: el relativo a la naturaleza de las proposiciones básicas o fundamentadoras, en particular, si es posible que existan proposiciones empíricas, o creencias empíricas, que puedan justificarse sin apelar a otras proposiciones empíricas. García postula que la justificación de creencias básicas empíricas puede lograrse sin invocar otras creencias, es decir, a través de una justificación externalista.

Dionisio Piña discute en su trabajo cómo explica Wilhelm von Humboldt la constitución de los conceptos y su posible objetividad, y concluye que la respuesta de éste recuerda al "realismo internalista" putnamiano y que Humboldt presupone la existencia de una naturaleza humana. El realismo de Humboldt "sostiene, por un lado, que hay una realidad independiente de los marcos conceptuales; y, por otro, que los hechos y los objetos que conocemos son el resultado de aplicar los marcos conceptuales a aquella realidad independiente". Su postura, afirma Piña, evita las posturas relativistas extremas y antifundamentistas, pues la objetividad y la comunicabilidad del conocimiento quedan garantizadas porque cree en una realidad independiente de los marcos conceptuales.

Carmen Trueba, por último, se pregunta sobre la metaética de Aristóteles y la compara brevemente con la de Platón-Sócrates y la de los sofistas. Aristóteles, nos dice, se aparta "de la noción universal y ontológica del bien de Platón; pero a la vez, rechaza que los criterios de 'corrección' e 'incorrección moral' sean arbitrarios". Trueba concluye que el pensamiento ético de Aristóteles se sitúa entre el relativismo sofístico y el universalismo socrático-platónico y que Aristóteles es, hasta cierto punto, un fundamentista moral al invocar la norma de la "función propia" y requerir presupuestos metafísicos sobre la naturaleza humana, así como una concepción de la racionalidad humana.

Max Fernández de Castro
Armando Cíntora