Wittgenstein y el programa de Hilbert

*Sílvio Pinto**

IZTAPALAPA
Agua sobre lajas

Resumen: A pesar del contundente señalamiento de Wittgenstein, su argumento en contra del programa de Hilbert nunca fue tomado muy en serio. En el presente texto me propongo revertir esta tendencia y mostrar que dicho argumento es incluso más destructivo del programa de Hilbert que el argumento de Gödel. Además, pretendo mostrar que la crítica wittgensteiniana incluye otras objeciones a diversos aspectos del programa. Empiezo con un resumen sobre las características técnicas del programa de Hilbert que serán relevantes para la presentación de las críticas de Gödel y Wittgenstein. A continuación, abordo en forma breve la crítica de Gödel. Paso entonces a la exposición de tres críticas del Wittgenstein intermedio al fundamentismo de Hilbert. Finalmente, hago una comparación sucinta entre las objeciones de Gödel y Wittgenstein.
Palabras clave: metamatemática, filosofía de las matemáticas, fundamentismo, Wittgenstein.

Kein Kalkül kann ein philosophisches Problem entscheiden.
Wittgenstein, 1969, parte II, III, § 12

Introducción

En la primera mitad de la década de 1920, David Hilbert lanzó un nuevo programa de fundamentación de la matemática, un programa de investigación dentro de esa misma ciencia, cuyo objetivo era proporcionar pruebas de consistencia para todos los sistemas matemáticos. Después de haber incursionado en casi todas las ramas de la matemática y en la física matemática, y haberse establecido como uno de los mayores matemáticos de todos los tiempos, Hilbert decidió meterse por segunda vez en los fundamentos de las matemáticas.

* Profesor investigador del Departamento de Filosofía de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. pint@xanum.uam.mx

FECHA DE RECEPCIÓN 21/05/03, FECHA DE APROBACIÓN 10/12/03

Su primera incursión en este campo tuvo como resultado la nueva axiomatización de la geometría propuesta en 1899 *(Die Grundlagen der Geometrie)*. En este primer programa ya se encuentran algunas de las preocupaciones filosóficas de Hilbert en relación con las matemáticas: la axiomatización total de las teorías matemáticas, la concepción de los axiomas como definiciones implícitas, la búsqueda de respuestas a cuestiones metamatemáticas, como la consistencia e independencia de los axiomas matemáticos, la conexión entre las nociones de consistencia de un sistema axiomático y de la existencia de los objetos descritos por tal sistema, entre otras.

En el inicio de los años veinte, y gracias al trabajo del lógico noruego Thoralf Skolem sobre la matemática finitista, Hilbert pudo finalmente enunciar su nuevo programa de manera no circular. Éste compartía con el primero la preocupación pragmática de la ausencia de contradicción de los sistemas matemáticos; los dos abogaban por la búsqueda de pruebas de consistencia para todos los sistemas matemáticos. En el inicio del siglo XX, se conocían solamente pruebas de consistencia relativa de los sistemas axiomáticos; Hilbert mismo había probado la consistencia de su sistema de geometría en relación con la aritmética. No obstante, la garantía definitiva de consistencia requería una demostración de la consistencia absoluta del cálculo matemático más básico: la aritmética o quizás la teoría de conjuntos. La cuestión cardinal era la siguiente: ¿cómo demostrar la consistencia absoluta de la aritmética o de la teoría de conjuntos sin caer en una circularidad viciosa?

La solución a este problema vendría en la década de 1920. El sistema matemático en que se desarrolla la prueba de consistencia de la aritmética se constituye de la parte no problemática de la misma: la aritmética finitista descubierta por Skolem (la de los *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell sin sus cuantificadores ilimitados). El sistema cuya consistencia debía ser demostrada es el sistema axiomático de primer orden debidamente formalizado de la aritmética de los números naturales. Con esto se evitaría el problema de la circularidad de la prueba absoluta de consistencia de la aritmética, ya que la aritmética finitista de Skolem no requiere ella misma una prueba de consistencia; según Hilbert, ella contiene la totalidad de los procedimientos intuitivos de manipulación de símbolos que representan cada uno de los números naturales.

Tampoco la exigencia de que la consistencia a ser demostrada fuera absoluta estaba siendo violada en el nuevo programa de Hilbert, ya que la aritmética de Skolem se constituye de una parte propia de la aritmética de primer orden. No obstante, justamente debido a esto se podría afirmar que tal prueba de consistencia contendría una circularidad. La salida de Hilbert fue decir que dicha circularidad no es viciosa porque la aritmética de Skolem, como ya mencionamos, contiene solamente procedimientos intuitivos de cálculo con los números.

En la segunda mitad de la década de 1920 fueron presentadas algunas pruebas de consistencia: sobresalieron las de Ackermann (1925), von Neumann (1927) y Herbrand (1929). Ninguna de ellas fue considerada plenamente satisfactoria, una vez que demostraban la consistencia de fragmentos cada vez más extensos, pero nunca de la totalidad de la aritmética de Peano.

Poco después el programa de Hilbert sufrió su golpe fatal: a inicios de 1931, el joven matemático austriaco Kurt Gödel publicó las pruebas de dos teoremas que demuestran la imposibilidad de éxito de dicho programa, conocidos como teoremas de incompletud de la aritmética, los cuales afirman, entre otras cosas, la imposibilidad de una prueba de consistencia de la aritmética de Peano desde el punto de vista de la aritmética de Skolem. El efecto del descubrimiento de Gödel sobre la continuidad del programa fundamentista de Hilbert fue inmediato y duradero.

Más o menos en la misma época en que Gödel traía a la luz sus resultados, Ludwig Wittgenstein ya expresaba su escepticismo sobre la posibilidad de éxito del programa de Hilbert. Según Wittgenstein, ningún cálculo matemático (como la aritmética de Skolem), así como ninguna teoría científica podría jamás resolver un problema filosófico. Esto se debe a que para Wittgenstein los problemas filosóficos son esencialmente distintos de los matemáticos o científicos; los primeros son problemas conceptuales, mientras que los últimos requieren como solución una prueba (en el caso matemático) o una teoría bien confirmada empíricamente (en el caso científico). Los problemas filosóficos exigen para su solución algo totalmente diferente: el análisis conceptual.

A pesar del contundente señalamiento de Wittgenstein, su argumento en contra del programa de Hilbert nunca fue tomado muy en serio. En el presente texto,* me propongo revertir esta tendencia y mostrar que es incluso más destructivo del programa de Hilbert que el argumento de Gödel. Además, pretendo mostrar que la crítica wittgensteiniana incluye otras objeciones a diversos aspectos del programa. Para lograr mis dos propósitos, atenderé la siguiente estrategia. Empiezo (sección 1) con un resumen sobre las características técnicas del programa de Hilbert que serán relevantes para la presentación de las críticas de Gödel

* Versiones iniciales de este trabajo fueron presentadas en el coloquio ¿Crisis del fundamentismo?, en la Casa del Tiempo de la Universidad Autónoma Metropolitana en octubre de 2002 y en las V Jornadas Rolando Chuaqui Kettlun en abril de 2003 en la Pontificia Universidad Católica de Chile. Agradezco a las audiencias de los eventos por sus comentarios y críticas y, en especial, a Max Fernández de Castro por sus amables sugerencias de fondo y de forma.

y Wittgenstein. A continuación (sección 2), presento los juicios de Gödel. En la sección 3 expongo la crítica de la fase intermedia de la filosofía de Wittgenstein al fundamentismo de Hilbert. Para esto, será necesaria una breve exposición de cómo Wittgenstein entendía tal fundamentismo. Finalmente, hago una breve comparación entre las objeciones de Gödel y Wittgenstein.

1. El programa de Hilbert

El segundo programa fundamentista de Hilbert (el de inicio de los años veinte) se puede expresar de la siguiente manera: la matemática habrá sido construida sobre una base epistemológicamente segura cuando su teoría más básica haya probado ser consistente; por lo tanto, hay que buscar una prueba de la consistencia de tal teoría. La idea ya está presente en los textos anteriores de Hilbert.[1] Sin embargo, en la primera mitad de la década de 1920 él encontró una manera de sugerir una prueba de consistencia absoluta de la teoría que sirve de fundamento para la matemática –la aritmética de primer orden con identidad– que no fuera circular (cf. Hilbert, 2000b).

La motivación filosófica

Pero antes de entrar en el detalle técnico del programa de Hilbert, me parece importante entender la preocupación filosófica que actuó como motor para dicho programa. En primer lugar, es necesario aclarar que tal preocupación es esencialmente epistemológica; se trata de un programa de investigación cuyo objetivo es garantizar la confiabilidad total o certeza del conocimiento matemático.[2] Dos son los motivos para el intento de Hilbert de asegurar dicha certeza. El primero consiste en eliminar de los sistemas matemáticos cualesquiera paradojas o contra-

[1] Me refiero a Hilbert (1967a [1904]).

[2] En el pasaje siguiente, la preocupación con la preservación de la certeza del conocimiento es clarísima: "My investigations in the new grounding of mathematics have as their goal nothing less than this: to eliminate, once and for all, the general doubt about the reliability of mathematical inference. We can see how necessary such an investigation is, if we think of how changeable and imprecise the intuitions of even the most distinguished mathematicians have been in this area, or if we remember that the inferences that were previously regarded as the most certain in mathematics have been challenged by some of the most renowned mathematicians of modern times" (Hilbert, 2000c: 1136).

dicciones. Esta motivación ya estaba presente en su primer programa; las paradojas de la teoría de conjuntos ya eran conocidas desde finales del siglo XIX. Una idea aquí es que un sistema que contenga contradicciones no puede ofrecer un conocimiento de un determinado dominio de objetos, ya que la existencia de tal dominio es equivalente a la ausencia de contradicción. La afirmación de esta equivalencia también ya está presente en el primer programa de Hilbert.[3]

Una segunda idea de la tesis hilbertiana de que hay que eliminar las contradicciones de cualesquiera sistemas matemáticos es que uno de ellos que contenga una contradicción, aunque todavía no sea encontrada, no puede tener alguna aplicación. Dos temas se conjugan para formar esta segunda idea. El primero se puede expresar diciendo que es su aplicación la que confiere a la matemática el estatus privilegiado de que disfruta. El siguiente pasaje lo afirma de manera bastante elocuente:

> The instrument which mediates between theory and practice, between thought and observation, is mathematics; it builds the connecting bridges, and makes them sounder. Thus, it happens that our entire modern culture, in so far as it rests on the penetration and utilization of nature, has its foundations in mathematics […] And in fact, we have not mastered a theory in the natural sciences until we have extracted and fully revealed its mathematical core. Without mathematics, modern astronomy and physics would not be possible; these sciences, in their theoretical parts, almost dissolve into mathematics. It is to these applications and numerous others that mathematics owes the prestige which it enjoys in the general public (Hilbert, 2000d: 1163-1164).[4]

El segundo tema constituyente de la idea de que un sistema inconsistente no puede tener una aplicación es que la existencia de un dominio de objetos sobre el cual habla una teoría axiomatizada equivale a la consistencia de tal teoría. Esta idea se puede expresar de la siguiente manera: un sistema axiomático inconsistente puede generar cualquier consecuencia y, por tanto, no puede dejar de afirmar nada; se convierte así en un sistema inaplicable, ya que se perdería la distinción entre lo verdadero y lo falso.

3 A propósito, véase Hilbert (2000a: 1104-1105).

4 Hay que reconocer que en el mismo artículo Hilbert considera que el mayor valor de las matemáticas no reside en su aplicabilidad, sino en que se trata de una de las más elevadas realizaciones del espíritu humano. Ésta es la opinión de la mayoría de los matemáticos. Sin embargo, él también reconoce que para el público en general, el mayor prestigio de las matemáticas se debe a su enorme aplicabilidad.

El segundo motivo para la preocupación de Hilbert de garantizar la certeza del conocimiento matemático no está presente en su primer programa: se trata de su lucha para proteger la llamada matemática clásica del escepticismo de Luitzen Brouwer y Hermann Weyl. Desde la década de 1910 Brouwer venía insistiendo en que ciertas formas lógicas de inferencia no son universalmente válidas en la matemática. Él pretendía mostrar específicamente que las formas de inferencia que incluyen el principio de tercer excluido, por ejemplo, el llamado método indirecto de prueba, podían llevar a conclusiones inaceptables cuando eran aplicadas a oraciones matemáticas cuantificadas universalmente.[5] Su sugerencia era intentar construir una nueva matemática, dejando de lado tales formas de inferencia, supuestamente espurias. La matemática que emergió del esfuerzo de Brouwer y de sus discípulos –el mayor de los cuales fue probablemente Weyl– se conoce como matemática intuicionista o constructivista.

El intuicionismo defendido por la escuela de Brouwer nunca le convenció a Hilbert. En particular, le molestaba el hecho de que, en su intento heroico de fundar la matemática en los procedimientos intuitivos y a priori de contar cosas, los intuicionistas llegaron a construir un análisis bastante más débil que el clásico.[6] Varios teoremas de este último son drásticamente debilitados en el análisis intuicionista; por ejemplo, el teorema fundamental del análisis: dado cualquier intervalo que contiene infinitos números reales, hay un supremo dentro del intervalo. Hilbert no aceptaba que grandes fragmentos de la matemática tuvieran que ser sacrificados por los partidarios del intuicionismo; para él, había que defender la integridad de toda la matemática clásica. Éste fue uno de los más fuertes propósitos de su segundo programa fundamentista.

El detalle técnico del programa

Las propuestas de Hilbert se remontan a la corriente matemática rigorista de la segunda mitad del siglo XIX que culmina con el matemático y filósofo alemán Gottlob Frege. El rigorismo anterior a Frege –un ejemplo del cual se encuentra

[5] Un texto de finales de los años veinte en donde Brouwer critica al principio de tercer excluido y al método indirecto es Brouwer (1975b [1929]). Pero, desde su tesis de doctorado (que por cierto se llama "On the Foundations of Mathematics" (Brouwer, 1975a [1907]), él ya abogaba por una construcción alternativa de la matemática.

[6] Para una comparación entre el análisis clásico y el intuicionista, véase por ejemplo Dummett (1977). No estoy seguro de que el análisis intuicionista sea realmente más débil que el clásico. Sin embargo, ésta era la concepción sobre el asunto en la época de Hilbert.

en el matemático alemán Karl Weierstrass– había logrado reducir toda la matemática a la aritmética de los números naturales.[7] Frege profundiza un poco más el fundamentismo de Weierstrass en tanto busca demostrar que la aritmética misma es reducible a la lógica de segundo orden.[8] El fundamentismo de Hilbert se distingue del de Frege en varios aspectos, pero también comparte con él otros. Uno de los puntos de convergencia es considerar la aritmética como los cimientos del edificio de conocimiento matemático. Los dos divergen sobre la manera de mostrar que la aritmética realmente constituye tal fundamento. Frege, como ya mencionamos, cree que tal demostración requiere hacer descansar la aritmética sobre la lógica. Hilbert, por su lado, piensa que no es necesario buscar un sistema más amplio sobre el cual basar la aritmética; lo único que se requiere es probar que ésta es consistente.

Hilbert reconocía dos tipos de prueba de consistencia: la consistencia relativa y la absoluta. La primera radica en demostrar la consistencia de un sistema dado exhibiendo una interpretación correcta[9] del mismo que apela a otro sistema matemático. Dicha prueba es relativa en la medida en que muestra que el primer sistema es consistente si el segundo sistema también lo es. Hilbert mismo había dado una prueba de la consistencia relativa de su axiomatización de la geometría euclidiana (Hilbert, 1899). Es decir, él había propuesto un modelo aritmético de su propia versión axiomatizada del sistema de Euclides. También ya se conocían a finales del siglo XIX pruebas de consistencia de algunas geometrías no euclidianas relativas a la geometría euclidiana.

La prueba de consistencia absoluta debe ser una demostración de la ausencia de contradicción en un sistema axiomático desde el propio sistema. Éste es, según Hilbert, el tipo de prueba de consistencia que demanda la aritmética. El problema con tal tipo de prueba es que corre el riesgo de ser circularmente viciosa; es decir, de presuponer exactamente aquello que se está queriendo probar. ¿Cómo entonces evitar la circularidaridad viciosa sin abandonar el carácter absoluto de la prueba?

7 El reduccionismo aritmético es una forma de fundamentismo en matemáticas en la medida en que busca demostrar para cada teoría matemática que: a) sus nociones más primitivas se pueden definir en términos de nociones únicamente aritméticas y b) sus axiomas pueden ser demostrados a partir de verdades puramente aritméticas y algunas definiciones.

8 Esto está en Frege (1893-1903). Como sabemos, el programa de Frege –su logicismo– se mostró inconsistente y, por tanto, tuvo que ser abandonado. Tal programa fue retomado con algunas modificaciones para evitar la paradoja de Russell (la paradoja de la clase de todas las clases que no pertenecen a sí mismas) por Crispin Wright y Bob Hale a partir de la década de 1980. Al respecto, véase Wright (1983).

9 Uso aquí la noción de interpretación correcta en el sentido de un modelo.

En la primera mitad de los años veinte, Hilbert anunció haber encontrado finalmente una estrategia para solucionar el aparente dilema de la pregunta anterior. La estrategia de Hilbert se constituye por tres etapas consecutivas:

1) la axiomatización y posterior formalización de la aritmética de primer orden, de manera que toda la lógica clásica de primer orden sea válida para este sistema axiomático (SAFAPO);[10]
2) usar como metalenguaje para estudiar las pruebas formalizadas del sistema mencionado un cálculo que sea una parte propia de la aritmética y que no necesite de una fundamentación posterior;
3) en el metalenguaje (la metamatemática o teoría de la prueba) probar que la proposición $1 \neq 1$ no puede ser obtenida como conclusión de una prueba formalizada en SAFAPO.

Para la ejecución de la primera etapa, Hilbert ya podía contar con el excelente trabajo de Frege, modificado y mejorado por Alfred Whitehead y Bertrand Russell en el *Principia Mathematica* (Whitehead y Russell, 1910-1913). Seguramente había que eliminar la parte conjuntista del sistema formalizado del *Principia:* los axiomas conjuntistas de la elección, de la reducibilidad y de la infinitud, además de toda la teoría ramificada de los tipos. Se quedan los axiomas que gobiernan la noción de número natural y aquellos que rigen las nociones lógicas de implicación material, negación, conjunción y disyunción, los cuantificadores de primer orden y la identidad.[11] También serían necesarias definiciones para la suma, la multiplicación, la exponenciación y todas las operaciones aritméticas. Finalizada esta etapa, ya sabríamos cómo expresar todas las pruebas en SAFAPO de manera completamente formalizada.

Para llevar a cabo la segunda etapa del programa, necesitamos un sistema matemático más débil que SAFAPO, que tenga la multiplicidad suficiente para poder hablar de todas las pruebas de este último sistema, pero que no necesite una demostración de su consistencia. La idea de Hilbert, ya presente en un escrito de 1922, es usar el sistema de la aritmética de primer orden sin los cuantificadores; el sistema que un año después Skolem expondría de manera magistral.[12] Tal

[10] Siglas de sistema axiomático formalizado de la aritmética de primer orden.

[11] Hilbert propone una axiomatización completa de SAFAPO –aunque reconozca que es arbitraria cualquier elección de axiomas– en Hilbert (1967b: 465-469).

[12] El artículo de Skolem se llama "Los fundamentos de la aritmética elemental establecidos a través del modo recursivo de pensamiento, sin el uso de variables aparentes que recorren dominios infinitos" (Skolem, 1967).

sistema, que llamaremos de aquí en adelante sistema de la aritmética finitista (SAF),[13] tiene como contenido las pruebas en SAFAPO, que son objetos concretos y por lo tanto que pueden ser reconocidos *(surveyed)* de manera intuitiva en todos sus aspectos. Por esto, SAF no necesita ni de axiomatización ni de formalización. Lo dice el mismo Hilbert:

> When we develop number theory in this way, there are no axioms, and no contradictions of any sort are possible. We simply have concrete signs as objects, we operate with them, and we make contentual statements about them […] we can achieve an analogous point of view if we move to a higher level of contemplation, from which axioms, formulae, and proofs of the mathematical theory are themselves the objects of a contentual investigation. But for this purpose the usual contentual ideas of the mathematical theory must be replaced by formulae and rules, and imitated by formalisms. In other words, we need to have a strict formalization of the entire mathematical theory, inclusive of its proofs […] The axioms, formulae, and proofs that make up this formal edifice are precisely what the number-signs were in the construction of elementary number theory […] and with them alone, as with the number-signs in number theory, contentual thought takes place… (Hilbert, 2000b: 1123).

Una prueba, así como un número natural en su representación en términos de secuencias de barras (|, | |, | | |, ...), es siempre un objeto finito que invariablemente puede ser abarcado por el pensamiento humano de manera completa. Además, sin la cuantificación universal o existencial ilimitada[14] no es posible hablar sobre totalidades infinitas como la totalidad de los números naturales o la de las pruebas dentro de un sistema axiomático formalizado. El poder construir indiscriminadamente el infinito matemático y hablar sobre estas diversas construcciones fue, como ya sabemos de la historia de los fundamentos de las matemáticas, la razón por la cual han surgido paradojas y contradicciones en los diversos sistemas matemáticos. Esta fuente de inconsistencia está definitivamente eliminada en el SAF. Finalmente, los métodos de prueba en SAF son todos constructivos (es decir, no hay pruebas por método indirecto dentro de este sistema). Esto significa que las exigencias intuicionistas de Brouwer y sus discípulos son satisfechas por SAF. Dicho sistema es intuitivamente consistente; no es necesaria por lo tanto una prueba de su consistencia.

[13] Hilbert lo nombró así más tarde en el libro que escribió junto con Paul Bernays (Hilbert y Bernays, 1934).

[14] Las oraciones con cuantificadores limitados son equivalentes a disyunciones y conjunciones finitas de oraciones sin estos cuantificadores. Tales oraciones son parte de SAF. Véase Skolem (1967).

Faltaba realizar solamente la tercera etapa: la demostración de la consistencia de SAFAPO. El optimismo sobre la factibilidad de tal demostración era enorme entre los seguidores del programa de Hilbert. No era para menos; inspirados por él, compartían la creencia de que todo problema matemático bien formulado, o tiene una solución o se puede demostrar que es imposible resolverlo. En este momento, la primera disyuntiva gozaba de mucho más credibilidad que la segunda, ya que durante la década de 1920 fueron propuestas varias pruebas de consistencia para diversos fragmentos de la aritmética. El propio Hilbert había probado en su artículo de 1922 la consistencia del siguiente sistema axiomático sencillo:

I. $a = a$
II. $a = b \rightarrow a + 1 = b + 1$[15]
III. $a + 1 = b + 1 \rightarrow a = b$
IV. $a = c \rightarrow (b = c \rightarrow a = b)$
V. $a + 1 \neq 1$

En 1925, Wilhelm Ackermann probó la consistencia del sistema SAF en su disertación doctoral, cuyo asesor fue el propio Hilbert. Es obvio que no sirvió para probar la consistencia de SAFAPO, además de que la prueba contiene claramente una circularidad viciosa. En estricto sentido no sirvió ni para probar la consistencia de SAF, pues usaba los modos de razonar que se estaban intentando justificar mediante la prueba de consistencia.

Un intento de probar la consistencia de un fragmento más robusto de SAFAPO fue hecho dos años más tarde por John von Neumann (1927). Además de los axiomas propuestos por Ackermann, von Neumann propuso otros para lidiar con los cuantificadores ilimitados y logró probar prácticamente lo mismo que Ackermann ya había demostrado. Sin embargo, su prueba se consideró más clara y elegante que la de Ackermann, ya que utilizó por primera vez conceptos de la teoría de modelos.[16]

Entre 1929 y 1931, Jacques Herbrand probó la consistencia de un sistema axiomático más fuerte que aquellos cuya consistencia había sido probada por Ackermann y von Neumann. El sistema probado por Herbrand contenía axiomas para los cuantificadores ilimitados; faltaba solamente el axioma de inducción com-

[15] La flecha denota la implicación material.
[16] Como, por ejemplo, el concepto de valoración de una determinada fórmula.

pleta y otros que gobiernan las funciones recursivas aritméticas para constituir SAFAPO integralmente. De hecho, Herbrand reconocía de manera más o menos intuitiva y al mismo tiempo que Kurt Gödel la imposibilidad de demostrar la consistencia del sistema completo de la aritmética de primer orden usando el punto de vista finitista. Sin embargo, fue sólo con la demostración de Gödel de dicha imposibilidad que el programa de Hilbert sufrió su más duro golpe.

2. La crítica de Gödel

En un *abstract* presentado a la Academia de Ciencias de Viena a finales de 1930 y después, de manera detallada, en su famoso artículo de 1931, Gödel expuso dos teoremas que representaron un golpe mortal para el programa de Hilbert. La reacción a las pruebas de Gödel de estos dos teoremas no fue inmediata, debido a la complejidad de las ideas presentes en su trabajo y al carácter innovador de varias herramientas usadas por él para demostrarlos.

Los teoremas probados por Gödel se pueden expresar en lenguaje natural de la siguiente manera:

> Primer teorema: si la aritmética formalizada de primer orden (el sistema SAFAPO) es consistente, entonces ella es incompleta (hay fórmulas de este sistema tales que ni ellas ni sus negaciones pueden ser probadas en SAFAPO).
>
> Segundo teorema: si la aritmética formalizada de primer orden (el sistema SAFAPO) es consistente, entonces dicha consistencia no puede ser probada en SAFAPO.

Es necesario establecer algunas precisiones sobre los teoremas anteriores para evitar confusiones derivadas de que fueron descritos en lenguaje natural. En primer lugar, no debemos olvidar que existe una conexión entre el primer y el segundo teoremas: la demostración de la imposibilidad de una prueba de la consistencia de la aritmética (el sistema SAFAPO) dentro de la propia aritmética (esto es, dentro del mismo SAFAPO) se deduce del hecho de la incompletud de tal sistema de la aritmética. El primero es un teorema de la metamatemática. Sin embargo, dado que ésta como sistema es un subsistema, aunque no formalizado, de SAFAPO, entonces sería posible expresar el primer teorema dentro del sistema formal (SAFAPO). El resultado de tal traducción es el segundo teorema. Más específicamente, una de las fórmulas que no se puede demostrar –ni su negación– es la que afirma la consistencia de SAFAPO.

Una segunda precisión es que el antecedente del primer teorema es más fuerte que la mera consistencia; lo que Gödel toma como antecedente de dicho teorema es la ω-consistencia. Un sistema axiomático es ω-consistente si y sólo si no es posible tener como sus teoremas las fórmulas *A(0), A(1), ..., A(n)*... para todos los numerales *y*, pero no la fórmula ¬*(∀x)A(x)*. La condición de ω-consistencia es más fuerte que la mera consistencia porque un sistema meramente consistente puede ser ω-inconsistente (por ejemplo, en el caso de que contenga *A(0), A(1), ..., A(n)*... y también ¬*(∀x)A(x)* pero no una regla ω),[17] mientras que un sistema ω-consistente no podría ser inconsistente. Algunos años más tarde, Roser (1936) mostró que el primer teorema podría tener como condición simplemente la consistencia del sistema SAFAPO.

La última precisión requiere modificar la formulación de los dos teoremas en el sentido de que sus demostraciones no valen solamente para el sistema SAFAPO, sino también para todos los sistemas afines a él. Esto significa que, según Gödel,[18] éstos tienen que satisfacer las tres siguientes condiciones: a) deben tener por lo menos el mismo poder expresivo del sistema de *Principia Matemática* (por ejemplo, el sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel seguramente lo tiene, de acuerdo con Gödel); b) las nociones sintácticas *término, oración* y *prueba* deberían poder codificarse de manera recursiva mediante números naturales, sus propiedades y relaciones (la aritmetización de la sintaxis del cálculo); c) deben ser sistemas con un número finito de axiomas y además ser ω-consistentes.[19]

Entre los descubrimientos de Gödel está el de un sistema de codificación de acuerdo con el cual los símbolos, oraciones y pruebas de la aritmética formal podrían ser representados de manera unívoca en términos numéricos. Esto significa que las nociones sintácticas de la teoría como *ser un término, ser una fórmula, ser una oración, ser una prueba,* etcétera, pueden ser representadas como propiedades recursivas de los números (de los números de Gödel de sus respectivos términos, fórmulas, pruebas, etcétera). El sistema de codificación inventado por Gödel ha logrado lo que se acostumbró llamar aritmetización de la sintaxis del lenguaje. La metamatemática puede, de esta manera, ser vista como la teoría que habla, en términos aritméticos, de la sintaxis de la aritmética formal. El punto de vista

[17] La regla ω corresponde a la siguiente forma de inferencia: *A(0), A(1), ..., A(n), ...//(∀x)A(x)*. Es decir, de un número infinito denumerable de premisas *A(n)*, en donde *n* recorre todos los numerales, infiera *(∀x)A(x)*.

[18] Esto es lo que infiero de Gödel (1967a: 595-596 y 1967b: 596-597).

[19] Condiciones esencialmente mínimas a ser satisfechas por los sistemas para los cuales valen los teoremas de Gödel fueron más tarde enunciadas en Hilbert y Bernays (1934). No obstante, me parece que son prescindibles para los propósitos del presente trabajo.

finitista sobre la aritmética formalizada, expresado por Hilbert en la ya mencionada cita de su texto de 1922, según el cual las nociones sintácticas de dicha aritmética –sus términos, fórmulas, oraciones y pruebas– son ellas mismas objetos de un lenguaje que las describe sin apelar a cuantificadores ilimitados, encuentra en la aritmetización propuesta por Gödel una representación aritmética unívoca. La idea de que el metalenguaje de la aritmética está por completo inmerso en el lenguaje adquiere con el método de Gödel su formulación más precisa.

Irónicamente, es justo el hecho de que el poder expresivo del metalenguaje (SAF) es tan reducido lo que hace que, como bien lo mostró Gödel, la consistencia del sistema más poderoso (SAFAPO) no pueda ser demostrada en SAF. Una de las reacciones de Hilbert al segundo teorema de Gödel fue ampliar el poder expresivo de su teoría de la prueba.[20] De hecho, más tarde Gerhard Gentzen logró demostrar la consistencia de SAFAPO utilizando métodos antes prohibidos por el punto de vista finitista (por ejemplo, un tipo de inducción transfinita) (Gentzen, 1935 y 1938). El problema con este intento de escapar al resultado de Gödel es que desata de nuevo la objeción de circularidad viciosa lanzada ya una vez[21] contra el programa de Hilbert. Como respuesta a esta crítica, Hilbert había trazado la distinción entre la teoría de la prueba finitista –la cual precisamente por ser finitista no requiere una prueba de consistencia– y la aritmética formalizada de primer orden –la cual sí necesita ser demostrada como consistente–. No parece haber una salida satisfactoria para el programa de Hilbert ante los resultados de Gödel y las exigencias de su propia perspectiva epistemológica. Ante tal situación, lo más razonable es declarar el programa de Hilbert fracasado. Éste fue el camino que la mayor parte de la comunidad involucrada en él ha tomado sabiamente.

3. La crítica de Wittgenstein

Las objeciones de Wittgenstein al programa de Hilbert provienen más o menos de la misma época de la crítica de Gödel. Ellas aparecen básicamente en los manuscritos de Wittgenstein realizados entre 1929 y 1931 y entre 1931 y 1933, que

[20] Véase Torretti (1998: 317), donde se menciona un pasaje de un artículo de Hilbert de 1931, en que éste favorece el uso de la regla ω en el sistema formalizado de la aritmética. El problema es que tal regla contiene un número infinito de premisas y, por tanto, no es un objeto que puede ser reconocido en todos sus aspectos como las pruebas finitas a ser estudiadas por métodos finitistas.

[21] La objeción lanzada por Poincaré en 1905 (Poincaré, 1905-1906) contra el primer programa de Hilbert (presentado en Hilbert, 1967a).

después fueron llamados *Observaciones filosóficas*[22] y *Gramática filosófica*.[23] Voy a concentrarme en las consideraciones del segundo apéndice de las *Observaciones* y en la segunda parte de la *Gramática*, que trata sobre lógica y las matemáticas, de manera más específica en la sección III, cuyo título es "Fundamentos de las matemáticas".

Para entender las críticas de Wittgenstein al proyecto de Hilbert es esencial investigar, antes que nada, cómo lo entendía el primero.

Es razonable suponer que Wittgenstein concebía el trabajo de Hilbert como una propuesta epistemológica fundamentista que busca la teoría matemática más básica, a la cual todas las otras teorías matemáticas deben reducirse. En el caso de Hilbert, así como en los ya conocidos programas de Frege y Russell, la aritmética es tomada como la fundación del edificio matemático. Este primer elemento de la comprensión wittgensteiniana de los programas de Frege, Russell y Hilbert se puede comprobar, por ejemplo, en el siguiente pasaje:

> Tampoco la lógica es una metamatemática, es decir, el trabajo en un cálculo lógico no puede traer a la luz ninguna verdad esencial *acerca* de las matemáticas [...]
>
> [Con Russell, pero especialmente con Whitehead, hizo su entrada en la filosofía una pseudoexactitud que, en realidad, es el peor enemigo de la exactitud. En la base de todo ello está el error de pensar que un cálculo puede ser el fundamento de las matemáticas] (Wittgenstein, 1992: 581).

Un segundo elemento de la comprensión wittgensteiniana del programa de Hilbert es su creencia de que dicho programa requiere la demostración dentro de la metamatemática (la aritmética finita) y de que la aritmética no finita está libre de contradicciones. Los siguientes pasajes confirman esto:

> [Hilbert formula las reglas de un cierto cálculo como reglas de la metamatemática]
>
> Las reglas no deben contradecirse entre sí" es como "la doble negación no debe dar lugar a una negación". Es decir, es parte de la gramática de la palabra "regla" que "$p. \neg p$" no sea una regla (si es que "p" es una regla) [...]
>
> Pero tampoco aquí podemos dar un fundamento (excepto biológico o histórico) sino únicamente constatar el acuerdo o desacuerdo de las reglas con ciertas palabras, y decir que estas palabras se usan con estas reglas (Wittgenstein, 1992: 583 y 597).

22 Wittgenstein, 1964 (traducción al español, Wittgenstein, 1997).
23 Wittgenstein, 1969 (traducción al español, Wittgenstein, 1992).

Según Wittgenstein, el problema filosófico que Hilbert buscaba resolver era garantizar la confiabilidad del conocimiento matemático. Éste parece ser el tercer elemento de su comprensión del programa de Hilbert. Dicha búsqueda de la certeza torna tal programa eminentemente filosófico y da un sentido al fundamentismo de Hilbert. Sí, porque éste no responde sólo a la posibilidad de reducción de toda la matemática a la aritmética, sino que es un intento bastante sofisticado de dar una respuesta al escéptico sobre el conocimiento matemático. Lo interesante es que Wittgenstein haya captado bastante bien este aspecto del proyecto hilbertiano, como lo demuestra la siguiente cita:

> ¿Qué significa que las matemáticas deben "quedar aseguradas"? [Cf. D. Hilbert, *Neubegründung der Mathematik*, Gesammelte Abhandlungen III, p. 74, entre otras]. ¿Qué pasaría si las matemáticas no estuvieran aseguradas? ¿Es siquiera un enunciado decir que los axiomas son consistentes? (Wittgenstein, 1997: 310).

Pasemos a las objeciones wittgensteinianas a la fundamentación metamatemática de la aritmética. La primera y la más importante es la que sirve de epígrafe al presente texto. Según Wittgenstein, es un equívoco buscar resolver un problema filosófico apelando a un cálculo matemático (en este caso, la metamatemática). Dentro de tal crítica está la idea de que los problemas filosóficos son por naturaleza distintos de los problemas matemáticos o científicos y se resuelven usando otra estrategia, la del análisis conceptual. En este sentido, la estrategia de Wittgenstein es semejante a la de Aristóteles frente a las paradojas del movimiento –las paradojas de Zenón–. De acuerdo con Aristóteles, para eliminar las paradojas era necesario distinguir dos conceptos de infinito –el de una extensión infinitamente grande y el de una extensión finita, pero infinitamente divisible (con un número infinito de partes).

Para Wittgenstein, la raíz de la preocupación por las pruebas de consistencia de la aritmética está en el descubrimiento de las paradojas de la teoría de conjuntos. Su diagnóstico es que éstas no aparecen en el sistema matemático, sino que derivan del uso de expresiones ambiguas del lenguaje natural en la presentación informal de tal sistema. La solución de las paradojas exige, por tanto, un análisis y precisión del lenguaje, mas no una prueba. Esta última (la prueba de consistencia) no podría tener cualquier efecto sobre la erradicación de posibles paradojas, sino solamente sobre la eliminación de posibles contradicciones. El siguiente pasaje es elocuente:

> El ímpetu detrás de la preocupación actual por la consistencia vino principalmente de las antinomias. Ahora bien, debe decirse que estas antinomias no tienen nada

> que ver con las contradicciones de las matemáticas, que no hay aquí ninguna conexión. Porque las antinomias no surgieron en el cálculo, sino en el lenguaje usual, y ello precisamente porque se usan las palabras de manera ambigua. De manera que la resolución de las antinomias consiste en reemplazar el modo vago de hablar por uno preciso (reflexionando sobre el auténtico significado de las palabras). Las antinomias *se disuelven* gracias a un *análisis*, no por medio de una *prueba.*
>
> Si las contradicciones en matemáticas surgen por una falta de claridad, entonces no podré *nunca despejar la falta de claridad por medio de una prueba.* La prueba sólo prueba lo que prueba. Pero no puede despejar la niebla (Wittgenstein, 1997: 307).

Es probable que el mismo Hilbert haya confundido la ausencia de paradojas con la de contradicciones,[24] creyendo que al garantizar la ausencia de contradicciones en los cálculos matemáticos estaba automáticamente asegurándose de la ausencia de paradojas. Ésta debe haber sido una creencia común entre la gente que trabajaba sobre los fundamentos de las matemáticas en los años heroicos de las tres primeras décadas del siglo XX. Sin embargo, el aspecto que merece reflexión es si la distinción entre el sistema matemático axiomático y formalizado con la prosa que lo acompaña (es decir, la traducción al lenguaje natural de tal sistema) es indispensable para comprender los sistemas matemáticos.

Hilbert creía, siguiendo la corriente matemática rigorista ya mencionada, que dicha prosa es completamente dispensable. Esto explica su exigencia de axiomatización y formalización de todos los sistemas matemáticos. Según Hilbert, nuestra comprensión de cada noción matemática tratada en el sistema debe estar delimitada por un conjunto de axiomas de este sistema que son definiciones implícitas de las nociones en cuestión. Que ésta era su concepción lo atestigua la polémica de Hilbert con Frege a propósito de las definiciones y axiomas matemáticos como consecuencia de la publicación de los *Fundamentos de la geometría* (Hilbert, 1899).[25]

Supongamos entonces que Hilbert tuviera razón en que cualquier sistema matemático pudiera ser caracterizado por su respectivo sistema axiomático formalizado y fuera posible probar que este último es consistente. ¿Qué problema filosófico se hubiera resuelto con esta prueba? Alguien familiarizado con el

[24] La idea aquí es que una contradicción es un conflicto entre una proposición y su negación verifuncional que aparece solamente en un lenguaje formalizado, mientras que una paradoja o antinomia consiste en un conflicto entre proposiciones del lenguaje natural. Por ejemplo, las paradojas del movimiento propuestas por Zenón no son contradicciones en estricto sentido.

[25] La polémica desde el punto de vista fregeano se encuentra en Frege (1984a y 1984b).

programa de Hilbert podría afirmar que la certeza del conocimiento matemático expresado por tal sistema estaría finalmente asegurada. Sin embargo, ¿cómo es posible que una parte de un cálculo –la prueba de consistencia– sea capaz de callar al escéptico? ¿No podríamos, a pesar de la prueba de consistencia, permanecer con la duda sobre si el sistema en cuestión nos permite entender por completo las nociones axiomatizadas en él y, por tanto, tener creencias con grado de certeza absoluta sobre ellas? Wittgenstein insiste en que el programa de Hilbert no puede eliminar este tipo de dudas.

No obstante, aquí el defensor del programa de Hilbert podría sin duda replicar: justamente el que el sistema axiomatizado formal –en este caso SAFAPO– no pueda asegurar la certeza de dicho conocimiento matemático es lo que nos lleva a exigir que otro sistema –SAF– ofrezca tal garantía sin que él mismo la requiera. Y es cierto que la metamatemática (SAF) no requiere una prueba de consistencia. Pero, nuestra pregunta continúa sin respuesta: ¿y la prueba metamatemática de consistencia puede asegurar que la comprensión de las nociones del sistema inicial que nos proporcionan sus respectivos axiomas es completa y que, por tanto, todo el sistema nos ofrece un conocimiento seguro?

La segunda objeción encontrada en los escritos de la filosofía intermedia de Wittgenstein al programa de Hilbert se aplica igualmente a otros programas fundamentistas, como el logicismo de Frege y Russell. Según Wittgenstein, está completamente equivocada la idea de que hay un cálculo matemático más fundamental que de alguna manera sostiene el edificio matemático. En esta crítica está implícita la tesis de la época del *Tractatus* y de acuerdo con la cual, así como las verdades lógicas y de cualquier cálculo matemático no están fundamentadas en sus respectivos axiomas por su autoevidencia o carácter intuitivo, las teorías matemáticas tampoco están fundamentadas en una teoría lo más cercana posible a nuestras intuiciones. Para el autor del *Tractatus*, no hay verdades lógicas ni verdades aritméticas más intuitivas que otras; de la misma manera, la lógica no es más básica que la aritmética (cf. Wittgenstein, 1922: 6.127, 6.22, 6.2341). Así como cada proposición lógica o aritmética está en el mismo nivel que cualquier otra, la lógica está en el mismo nivel que la aritmética.

Esta tesis antifundamentista se amplía en los escritos del Wittgenstein intermedio con la idea de que no hay un sistema único de reglas de la sintaxis del lenguaje –como él había pensado en el *Tractatus*– sino que existen varios sistemas más o menos autónomos de reglas tales como la lógica, la aritmética, la geometría euclidiana, la gramática de los colores, entre otros. Cuando Wittgenstein afirma que tales sistemas son autónomos quiere decir que los significados de cualquiera de sus respectivas expresiones están dados internamente por las conexiones entre las proposiciones (axiomas y teoremas) o reglas del sistema (cf. Wittgenstein, 1964: 178). Además de que no hay en la fase intermedia un sistema matemático más básico sobre el cual descanse todo el edificio del conocimiento matemático, tampoco debemos ver los axiomas de un determinado sistema apoyando de alguna manera epistémicamente sus respectivos teoremas como si fueran los justificadores epistémicos más básicos dentro de éste. De acuerdo con el Wittgenstein intermedio, lo importante para nuestra comprensión y conocimiento de cualquier proposición matemática son sus conexiones deductivas con otras proposiciones de su respectivo sistema.[26]

Si Wittgenstein tiene razón en su antifundamentismo, entonces el reduccionismo de Frege, Russell y Hilbert no nos pueden ofrecer ninguna garantía epistémica acerca de las bases de la certeza matemática. Como Wittgenstein siempre ha defendido la idea de que las proposiciones matemáticas son reglas lingüísticas, sus preocupaciones han girado en torno a cuestiones tales como ¿qué es una regla lingüística? y ¿qué tipo de acceso epistémico tenemos a las reglas lingüísticas? Estas cuestiones constituyen el núcleo central de su filosofía madura de la matemática, del lenguaje y de la mente (véase Wittgenstein, 1953: 138-243).

La tercera y última objeción wittgensteiniana a ser discutida aquí tiene que ver con la idea de Hilbert de que una teoría matemática que contenga una contradicción o una paradoja escondida no puede tener una aplicación[27] y, por tanto, se hace necesario eliminar la posibilidad de su existencia. No se trata de negar que un sistema que contenga una contradicción explícita pueda ser inútil, en particular si contiene una regla que afirma que de una contradicción se sigue cualquier proposición. El problema es si la existencia de una contradicción no descubierta en un sistema matemático lo tornaría inutilizable. Parece ser una opinión común que la presencia de una contradicción dentro de una teoría matemática la haría inaplicable.

En una famosa discusión con Wittgenstein, Alan Turing opinó que si un sistema matemático que contuviera una contradicción escondida fuera aplicado, por ejemplo, en una teoría física que explicara cómo construir puentes podría

[26] En muchos pasajes de los escritos en la fase intermedia esto aparece como la exigencia de que el significado de una proposición matemática sea su prueba en el sistema al cual pertenece. La prueba aparece como el análisis de su respectiva proposición. Véase Wittgenstein (1964: 192).

[27] Hilbert se preocupaba por la aplicabilidad de la matemática y con la prueba de consistencia buscaba una garantía de que ésta puede tener una aplicación, idea no siempre aceptada por todos sus comentadores. Wittgenstein lo interpretaba así, pero también otros autores como Detlefsen. A este respecto, véase Detlefsen (1986).

llevar al derrumbe de un puente (véase Diamond, 1975: 211). La discusión en cuestión no pertenece a la fase intermedia de Wittgenstein. Sin embargo, ya en esa fase su opinión era la misma: la presencia de una contradicción escondida en un cálculo no tendría ningún efecto sobre posibles aplicaciones del cálculo hasta que finalmente se manifestara. Cuando esto pasara, entonces tendríamos que decidir qué hacer; una posibilidad sería eliminarla del cálculo. Esto es exactamente lo que establece:

> Algo me dice que una contradicción en los axiomas de mi sistema no puede causar ningún daño sino hasta que se revela. Pensamos en una contradicción como en una enfermedad oculta que provoca daño a pesar de que (y quizá precisamente porque) no se nos muestra de manera clara. Sin embargo, dos reglas que en un juego se contradicen entre sí en relación con un caso particular no son problemáticas sino hasta que este caso se presenta, y sólo entonces se hará necesario decidir entre ellas mediante una regla adicional.
>
> Las pruebas de consistencia de los axiomas, a las que los matemáticos dan tanta importancia hoy en día. Tengo la sensación de que si hubiera una contradicción en los axiomas de un sistema, ello no constituiría una gran desgracia. No hay nada más fácil que eliminarla (Wittgenstein, 1992: 595).

La oposición de Wittgenstein es a la idea de que un cálculo con una contradicción escondida no puede tener aplicación. De hecho, en la historia de las matemáticas hay ejemplos famosos de sistemas matemáticos que a pesar de contener paradojas tuvieron un uso; quizás el más famoso es el cálculo infinitesimal de Newton y Leibniz. Casos como éste muestran que uno puede aplicar un cálculo inconsistente o paradójico sin recurrir a las proposiciones del cálculo que contienen la contradicción o paradoja.

La analogía entre un sistema matemático y un juego tal vez pudiera ilustrar mejor el efecto de una contradicción escondida sobre la aplicación de un sistema matemático. Supongamos entonces que tenemos un juego gobernado por reglas, algunas de las cuales se contradicen, aunque todavía no lo hayamos descubierto. No obstante, podemos continuar jugando hasta que encontremos la contradicción. En este momento, tenemos que decidir si cambiamos algunas reglas para restaurar la consistencia y continuamos jugando a partir de las reglas contradictorias o simplemente decidimos no hacer nada con ellas y no seguir jugando. Si Wittgenstein tiene razón, la posibilidad de la existencia de una contradicción no constituye un impedimento a su posible aplicación.

Conclusión

Wittgenstein ciertamente tiene otras objeciones al programa de Hilbert. Las tres arriba mencionadas me parecieron las más relevantes. Me gustaría terminar con una breve comparación entre su crítica, tal y como la expuse aquí, y la crítica de Gödel. Esta última concierne sólo a la imposibilidad de que la herramienta técnica utilizada por Hilbert y sus seguidores (la metamatemática) logre los resultados que esperaban de ella. La crítica wittgensteiniana va más allá: muestra que aunque la metamatemática lograra lo que niega el segundo teorema de Gödel, no resolvería los problemas filosóficos de cómo responder al escéptico sobre la confiabilidad del conocimiento matemático y de cómo explicar nuestra comprensión y uso de los conceptos matemáticos.

Bibliografía

Brouwer, L.

1975a *The Foundations of Mathematics,* en A. Heyting, *L. E. J. Brouwer: Collected Works,* vol. 1, North-Holland, Amsterdam [1907].

1975b "Mathematik, Wissenschaft und Sprache", en A. Heyting, *L. E. J. Brouwer: Collected Works,* vol. 1, North-Holland, Amsterdam [1929].

Detlefsen, M.

1986 *An Essay on Mathematical Instrumentalism,* Reidel, Dordrecht.

Diamond, C.

1975 *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics Cambridge 1939,* The University of Chicago Press, Chicago.

Dummett, M.

1977 *Elements of Intuitionism,* Oxford University Press, Oxford.

Ewald, W.

2000 *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics,* Oxford University Press, Oxford.

Frege, G.

1893-1903 *Grundgesetze der Arithmetik,* Georg Olms Verlag, Hildesheim.

1984a "On the Foundations of Geometry: First Series", en B. McGuinness, *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy,* Basil Blackwell, Oxford [1903].

1984b "On the Foundations of Geometry: Second Series", en B. McGuinness, *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy,* Basil Blackwell, Oxford [1906].

Gentzen, G.

1935 "Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie", en *Mathematische Annalen*, vol. 112.

1938 "Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie", en *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften. Neue Folge*, vol. 4, pp. 19-44.

Gödel, K.

1967a "Some Metamathematical Results on Completeness and Consistency", en J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel,* Harvard University Press, Cambridge [1930].

1967b "On Formally Undecidable Propositions of *Principia Mathematica* and Related Systems I", en J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel,* Harvard University Press, Cambridge [1931].

Heyting, A.

1975 *L. E. J. Brouwer: Collected Works,* vol. 1, North-Holland, Amsterdam.

Hilbert, D.

1899 *Grundlagen der Geometrie,* Teubner, Leipzig.

1902 *The Foundations of Geometry*, trad. E. J. Townsend, Open Court, Chicago.

1967a "On the Foundations of Logic and Mathematics", en J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel,* Harvard University Press, Cambridge [1904].

1967b "On the Infinite", en J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel,* Harvard University Press, Cambridge [1926].

2000a "From Mathematical Problems", en W. Ewald, *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics,* Oxford University Press, Oxford [1900].

2000b "The New Grounding of Mathematics", en W. Ewald, *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics,* Oxford University Press, Oxford [1922].

2000c "The Logical Foundations of Mathematics", en W. Ewald, *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford [1923].

2000d "Logic and the Knowledge of Nature", en W. Ewald, *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics,* Oxford University Press, Oxford [1930].

Hilbert, D., y P. Bernays

1934 *Die Grundlagen der Mathematik,* vol. 1, Springer Verlag, Berlín.

McGuinness, B.

1984 *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy,* Basil Blackwell, Oxford.

Neumann, J. von
1927 "Zur Hilbertchen Beweistheorie", en *Mathematische Zeitschrift,* vol. 26, pp. 1-46.

Poincaré, H.
1905-06 "Les mathematiques et la logique", en *Revue de Metaphysique et de Morale,* vol. 13, pp. 815-835, vol. 14, pp. 17-34, 294-317.

Reid, C.
1986 *Hilbert; Courant,* Springer Verlag, Berlín.

Roser, J. B.
1936 "Extensions of some theorems of Gödel and Church", en *Journal of Symbolic Logic,* vol. 1, pp. 87-91.

Skolem, T.
1967 "The Foundations of Elementary Arithmetic Established by Means of the Recursive Mode of Thought, without the Use of Apparent Variables Ranging over Infinite Domains", en J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel,* Harvard University Press, Cambridge [1923].

Torretti, R.
1998 *El paraíso de Cantor,* Universidad Nacional Andrés Bello, Santiago.

Van Heijenoort, J.
1967 *From Frege to Gödel,* Harvard University Press, Cambridge.

Whitehead, A., y B. Russell
1910-13 *Principia Mathematica,* Cambridge University Press, Cambridge, 3 vols.

Wittgenstein, L.
1922 *Tractatus Logico-Philosophicus,* Routledge, London.
1953 *Philosophical Investigations,* Basil Blackwell, Oxford.
1964 *Philosophical Remarks,* Basil Blackwell, Oxford.
1969 *Philosophical Grammar,* Basil Blackwell, Oxford.
1992 *Gramática filosófica,* Instituto de Investigaciones Filosóficas, Universidad Nacional Autónoma de México, México.
1997 *Observaciones filosóficas,* Instituto de Investigaciones Filosóficas, Universidad Nacional Autónoma de México, México.

Wright, C.
1983 *Frege's Conception of Numbers as Objects,* Aberdeen University Press, Aberdeen.