La matemática, ¿requiere fundamentos?

IZTAPALAPA
Agua sobre lajas

*Carlos Torres Alcaraz**

Resumen: En este trabajo se examinan algunos sentidos en que la palabra *fundamento* se utiliza en relación con la matemática. Se trata del fundamento como *principio*, como *condición de posibilidad* y como *origen*. En la primera parte se examina, a la luz de algunos resultados obtenidos en el siglo XX, la posibilidad de dar un fundamento sólido y permanente a la matemática en el segundo sentido del término, es decir, de señalar y establecer las condiciones que la hacen posible. La conclusión a la que se llega es que la matemática no se puede fundamentar en la forma en que algunos autores, como Russell y Hilbert, pretenden. Como alternativa, se considera la posibilidad de fundamentarla en un sentido más débil, mediante una explicación de su naturaleza (fundamento en el tercer sentido del término). Para ello, se comparan dos intentos de explicación, el primero se basa en una interpretación modal y el segundo en una interpretación categórica de la matemática, los cuales son en cierto sentido equivalentes. Se concluye que tales explicaciones no constituyen un fundamento real, pues son en gran media arbitrarias. Hacia el final se retoma la cuestión de los fundamentos en tanto que análisis crítico de los principios de las teorías matemáticas y se propone entender la matemática como una actividad condicionada por la historia, lo cual impediría su racionalización objetiva completa.
Palabras clave: fundamentos, matemáticas, Hilbert, Gödel, constructivismo, Russell.

Por lo general, la expresión "fundamentos de la matemática" se utiliza en relación con la controversia suscitada a principios del siglo XX en torno a la naturaleza de la matemática, la cual culminó con el establecimiento de las tres escuelas tradicionales: logicismo, formalismo e intuicionismo. No obstante, la connotación del término va más allá de la polémica entre estas escuelas

* Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Fecha de recepción 18/06/03, fecha de aprobación 15/12/03

y comprende muchos otros aspectos: al hablar de los fundamentos de la matemática es necesario diferenciar al menos tres sentidos del término que conviene aclarar. Por una parte está el problema de los fundamentos de las distintas teorías matemáticas, es decir, de los *principios* sobre los que cada una de ellas se apoya; también está el problema de los fundamentos de la ciencia matemática como tal, es decir, de las *condiciones que la hacen posible*. Por último, existe un significado muy general del término, según el cual el fundamento sería la explicación del conocimiento matemático, de sus orígenes. Considerando estos tres sentidos del término, podemos decir que la cuestión de los fundamentos es al mismo tiempo una empresa lógica, matemática y filosófica que debemos diferenciar de la simple reflexión en torno a la naturaleza de la matemática.

Los fundamentos como condición de posibilidad

En el ámbito de la matemática, el término *fundamentos* se utilizó durante la primera mitad del siglo XX en sus dos primeros sentidos, pudiendo significar *principios* o *justificación*. Se habla, por ejemplo, de "los fundamentos del análisis matemático" para referirse a los principios sobre los que se erige dicha teoría; también se habla de *fundamentos* al señalar las condiciones que sirven o deberían servir como justificación y apoyo de las teorías matemáticas, como cuando se dice "para Frege, la matemática clásica se fundamenta en la lógica". Estas dos acepciones se relacionan a su vez con dos maneras distintas de interpretar la relación entre los fundamentos y lo fundado.

a) En el primer caso, el conocimiento matemático es algo que se deriva de los fundamentos; por ejemplo, al decir "Los axiomas de Peano dan *fundamento* a la aritmética de los números naturales".
b) En el segundo caso, los conocimientos no se derivan de los fundamentos, pero se justifican por ellos, como con Hilbert, que pretende fundamentar la matemática clásica sobre una prueba de consistencia absoluta.

Asimismo, hay distintas formas de entender los fundamentos en este último sentido. Se puede, por ejemplo,

b_1) apelar a la evidencia de una o varias proposiciones, como lo hacen Frege y Russell, o a una forma de la intuición, como lo hace Hilbert; o bien,

b_2) apelar a instancias que no son proposiciones, como lo hace Brouwer con la posibilidad de la construcción en la intuición pura.

Consideremos algunas de estas cuestiones en relación con la matemática clásica.

El problema de los fundamentos de la matemática clásica

En relación con el problema de los fundamentos de la matemática clásica –por matemática clásica entendemos la totalidad de los métodos de demostración en uso a principios del siglo XX– podemos distinguir dos fases claramente diferenciadas. Éstas corresponden, *grosso modo*, a los usos recién señalados. En primer lugar tenemos la clarificación de sus conceptos, la determinación de sus principios, y la introducción del rigor en sus demostraciones, tarea que se llevó a cabo durante la segunda mitad del siglo XIX (Cauchy, Weierstrass *et al.*). Pronto esta labor se vio extendida con la introducción del concepto de número real (Dedekind y Cantor), la introducción de métodos de demostración no constructivos en el análisis (Hilbert y Zermelo) y la aparición de la teoría de conjuntos (Dedekind y Cantor).[1] Aun cuando estos cambios e innovaciones produjeron algunas reacciones, podemos decir que lo logrado constituyó un fundamento para la matemática clásica en el primer sentido del término. En cuanto a la segunda fase, ésta dio inicio con los esfuerzos de Frege y Russell por reducir la matemática a la lógica, es decir, por fundamentarla en el segundo sentido del término.

La historia es bien conocida: la aparición de antinomias en la teoría de Frege y Russell, que de alguna manera se relacionaba con la teoría cantoriana de conjuntos, desencadenó un encendido debate no sólo en torno a los fundamentos, sino en torno a la naturaleza de la matemática misma. Como consecuencia, las críticas a las nociones y métodos no constructivos de la matemática se intensificaron. La reacción de los cantorianos no se hizo esperar: había que asegurar a la matemática clásica, mostrando cuán alejada se hallaba de los peligros que suponían las paradojas. A fin de cuentas ellos no habían ocasionado la crisis, a pesar de ser los operarios del tercero excluido, los métodos no constructivos y el infinito actual. De hecho, las antinomias habían aparecido en el sistema de Frege, donde el axioma de comprensión, al querer abarcar demasiado, llevó a una contradicción. Zermelo pensaba, por ejemplo, que en la práctica ningún matemático llegaría a considerar

[1] Los personajes nombrados entre paréntesis son sólo algunos entre quienes trabajaron en estas cuestiones.

conjuntos como el de todos los ordinales, o similares. Pero Frege y Russell, quienes deseaban edificar las matemáticas sobre los axiomas, evidentes según ellos, de una lógica formal, se dieron a la tarea de considerar monstruosidades como "la clase de todas las clases que no se pertenecen a sí mismas" por el solo hecho de tener a la mano la propiedad. De este modo la obra de los cantorianos fue puesta en duda tras el intento de Frege y Russell por "logizar" todo.

Pronto comenzaron los intentos por señalar al culpable. Brouwer declaró su desconfianza hacia la lógica y la acusó de ser la responsable de los teoremas no constructivos del análisis matemático y la teoría de conjuntos (véase Brouwer, 1975 y 1983). Poincaré y Russell, por su parte, atribuyeron el problema al círculo vicioso, que permite definir un elemento de un conjunto recurriendo a una totalidad de la que forma parte.[2] Para evitar esto último, Russell debió pagar un alto precio: el de una maquinaria lógica demasiado pesada, como la de *Principia Mathematica*, obra que escribió en colaboración de A. N. Whitehead. Zermelo, por su parte, eliminó las antinomias conocidas al adoptar la axiomática simplificada de la jerarquía acumulativa, sin poder garantizar que ningún otra contradicción destruiría al sistema (véase Zermelo, 1908).

Fueron éstas las circunstancias que rodearon la aparición del programa de Hilbert, cuya meta era fundamentar la matemática clásica por medio de una prueba finitista de consistencia (véase Hilbert, 1993b, 1993c y 1967). El programa habría de realizarse en dos partes. En primer lugar, todos los métodos de demostración existentes se debían formalizar, reduciéndolos a un número mínimo de axiomas y reglas de inferencia formal. Podemos decir que esta tarea fue realizada de manera satisfactoria con base en los lenguajes simbólicos creados por Peano, Frege y Russell. El resultado fue la construcción de un lenguaje formal totalmente preciso en el cual es posible expresar cualquier proposición de la matemática clásica mediante fórmulas. El rasgo más sobresaliente de este lenguaje es su carácter sintáctico, en el que las reglas sólo se refieren a la estructura externa de las fórmulas, no a su significado. A pesar de las dificultades derivadas del primer teorema de incompletud de Gödel, podemos decir que esta solución es satisfactoria y refuerza la fundamentación de la matemática clásica en el primer sentido del término (véase Gödel, 1967).

No obstante, había una segunda tarea que Hilbert y sus seguidores debían realizar: justificar tales axiomas y métodos de inferencia mediante una prueba o

[2] Este principio se utiliza, por ejemplo, en la definición de los números reales, ya sea en su construcción genética a partir de los números racionales (cortaduras de Dedekind), o en su definición axiomática con base en el axioma del supremo. Respecto a las críticas de Poincaré y Russell, véase Poincaré (1963) y Russell (1906).

explicación teórica del hecho de que constituyen un todo coherente, es decir, fundamentar la matemática clásica en el segundo sentido del término. Para que tal garantía tuviera efecto era preciso satisfacer ciertos requerimientos.

En general, para que una prueba de consistencia se considere satisfactoria en relación con una teoría (o represente al menos un paso adelante en tal dirección) es necesario que cumpla con alguna de las siguientes condiciones:

1) que la teoría en cuestión, digamos *T*, se reduzca a otra teoría *S*, que es más simple o para la cual se cuenta con una prueba como la referida en el siguiente inciso,[3]
2) que la prueba de consistencia sea directa y se lleve a cabo con medios tan seguros que nadie puede dudar de su validez. Proceder de esta manera es lo más cercano a demostrar la consistencia sin hacer suposiciones de ninguna especie.

Respecto a este último punto, Hilbert limitó los métodos de demostración a un mínimo aceptable por todos. La prueba habría de ser finitista y tendría como base la siguiente suposición: *la intuición del signo no nos puede engañar, la matemática finitista es absoluta.*[4]

Esto nos lleva al lado epistemológico del problema. Después de todo, lo que se busca con una prueba de no contradicción es asentar la matemática sobre una base segura de la que nadie pueda dudar. Al respecto, lo que el segundo teorema de Gödel establece es que ninguna prueba de consistencia logra este propósito en los casos de mayor interés –la aritmética, el análisis, la teoría de conjuntos–, de modo que esta parte del problema no se puede resolver en la forma prevista.

En efecto, el punto del segundo teorema de Gödel es que, en los casos más relevantes, ninguna prueba de consistencia se puede lograr recurriendo a una parte propia de la teoría. En cuanto a la matemática clásica, en la actualidad no se vislumbra alguna posibilidad de probar su consistencia a partir de algo que, sin ser una parte propia, sea más evidente o confiable: supuestamente, la matemática clásica abarca en principio todos los métodos de prueba conocidos (confiables o no).

[3] Un inconveniente de esta alternativa es que en ella el problema de la consistencia de *T* no se resuelve de manera absoluta, sino que se traslada al de la consistencia de *S*. Aun así, este método es de alguna utilidad en la medida en que puede llevar el problema de la coherencia de una teoría al de otra que, en cierto sentido, es más simple o confiable.

[4] A grandes rasgos, la matemática finitista se puede entender como una teoría combinatoria en la que sólo se consideran configuraciones finitas y discretas de objetos que se pueden representar de manera concreta, y cuyas representaciones se pueden inspeccionar en todas sus partes.

Las consecuencias para el programa son ampliamente conocidas: no se ve cómo superar el reto planteado por los teoremas de Gödel, los cuales nos hacen pensar en la imposibilidad de una fundamentación en el sentido que Hilbert pretende.[5] Estas conclusiones no dependen del punto de vista que se adopte respecto a la matemática; más bien, se apoyan en razones intrínsecas a la matemática misma. En los hechos, la empresa hilbertiana ha sido prácticamente abandonada, sin la esperanza de poderla resarcir. Algo similar podríamos decir del logicismo, cuyos méritos y vicisitudes no abordaremos por el momento.[6]

Dos puntos de vista opuestos

Consideremos dos caracterizaciones tradicionales de la matemática pura:

a) *Bertrand Russell, 1901.* La matemática pura consiste enteramente de aseveraciones como que si tal y tal proposición es verdadera de *cualquier cosa*, entonces tal otra proposición es verdadera de esa cosa. Es esencial no deliberar si la primera proposición es en realidad verdadera, ni mencionar qué es eso acerca de lo cual es verdadera (...) Si nuestra hipótesis es acerca de nada y no acerca de uno o más objetos particulares, entonces nuestra deducción constituye matemáticas. Así, la matemática se puede definir como la materia en la que nunca sabemos de qué estamos hablando, ni si lo que decimos es verdad (Russell, 1901: 84).
b) *Kurt Gödel, 1951.* La matemática describe una realidad no sensible, la cual existe con independencia tanto de los actos como de las disposiciones de

[5] Los teoremas de Gödel tienen al menos dos consecuencias de interés para la filosofía de la matemática. En primer lugar, nos muestran que la creencia precrítica en la consistencia de la matemática clásica no tiene justificación racional, pues para justificar dicha creencia deberíamos poner en juego principios más poderosos que los reunidos en la teoría misma. En segundo lugar, indican que no siempre es posible dejar de lado el contenido intuitivo de una teoría, ya que su formalización se presenta en todo momento como algo inacabado.

[6] Si bien el formalismo –al igual que el resto de las corrientes fundamentistas– ha proyectado considerable luz acerca de la naturaleza de la matemática, lo que su fracaso nos muestra es que no debemos pretender alcanzar por este camino una respuesta final a la pregunta por "el ser" de la matemática, como la ofrecida por Haskel B. Curry cuando dice: "la matemática es la ciencia de los métodos formales" (Curry, 1977: 14). En realidad, la única respuesta que se ha logrado en este sentido es negativa: la matemática no es una sintaxis del lenguaje ni un conjunto de convenciones sintácticas carentes de contenido. El programa sintáctico, léase Hilbert o Carnap, ha fracasado, y en algún sitio debemos enfrentar la intuición y la búsqueda de la verdad como elementos constitutivos de la matemática.

> la mente humana, y sólo es percibida por ella, aunque probablemente de manera incompleta. Las proposiciones matemáticas son verdaderas en virtud del significado de los términos que figuran en ellas, con independencia del mundo de la experiencia (caracterización extraída de Gödel, 1951: 321).

En el primer caso tenemos una "lectura" modal de la matemática: sus enunciados no son acerca de nada en particular; sus teorías son meros sistemas hipotético-deductivos en los que lo único que se puede afirmar es la verdad condicional de sus teoremas.

En el segundo caso tenemos una interpretación categórica de la matemática: sus enunciados están referidos a una realidad conceptual objetiva, la cual no podemos cambiar, sino sólo percibir o describir.

¿Debemos optar por alguna de estas dos interpretaciones?, ¿debemos decidir acerca de quién tiene la razón entre Russell y Gödel antes de proseguir el camino?, ¿serán tan distantes entre sí estos dos intentos de explicación?

Consideremos un teorema conocido de la teoría de los números; por ejemplo, el *algoritmo de la división*.[7] Denotemos con D la fórmula $\forall x \forall y(\neg(x = 0) \rightarrow \exists q \exists r (y = x \cdot q + r \wedge r < x))$ que expresa a este enunciado en la aritmética de primer orden, y con Ax la conjunción de los axiomas que figuran en la prueba de D. En su caso Gödel diría: "la fórmula D es verdadera; si la hemos tenido que deducir de los axiomas es porque su verdad no es inmediata". Russell en cambio diría: "la fórmula $Ax \rightarrow D$ es válida". Consideremos estas dos afirmaciones en su aparente oposición.

Ciertamente, la prueba de D muestra que se trata de una consecuencia lógica de Ax, es decir, que $\models \forall Ax \rightarrow D$; por tanto, la fórmula $Ax \rightarrow D$ es necesaria, y escribimos:

$$\Box(Ax \rightarrow D) \quad (*)$$

Tenemos así un enunciado modal, tal como se afirma en (*). De este modo, frente a los alegatos del realismo conceptual, según el cual la fórmula $Ax \rightarrow D$ describe propiedades de objetos eternos, podemos leer este enunciado al margen del significado de los términos considerados, como una fórmula cuya validez es independiente de los mismos. Por ejemplo, podemos eliminar en Ax y D toda

[7] Es decir, el siguiente teorema acerca de los números naturales: *Para cualesquiera dos números* x *e* y, *con* $x \neq 0$, *hay dos únicos números* q *y* r, *donde* $0 \leq r < x$, *tales que* $y = xq + r$.

referencia a operaciones y relaciones aritméticas sustituyendo los símbolos para la suma, el producto, etcétera, con letras de predicado sin alterar su forma lógica, tal como se indica en la siguiente tabla:

$x \cdot y \rightarrow P(x, y, z)$ (z es el producto de x e y)	$x < y \rightarrow M(x, y)$ (x es menor que y)
$x + y \rightarrow S(x, y, z)$ (z es la suma de x e y)	$x = y \rightarrow I(x, y)$ (x es igual a y)
$0 \rightarrow c$	

Con estos cambios, la fórmula D se transforma en la siguiente fórmula del cálculo puro de predicados:

$$D'\text{: } \forall x \forall y(\neg\, I(x, c) \rightarrow \exists q \exists r \forall z \forall w(P(x, q, z) \wedge S(z, r, w) \rightarrow I(y, w) \wedge M(r, x))$$

cuyo contenido específicamente matemático ha desaparecido. Al realizar los mismos cambios en la fórmula Ax, se obtiene un esquema abstracto $Ax' \rightarrow D'$ que corresponde a la fórmula $Ax \rightarrow D$, salvo que la primera no contiene nada específicamente matemático. Se trata de un esquema de la lógica modal, de una fórmula necesaria:

$$\square(Ax' \rightarrow D')$$

Visto que la validez de (*) no depende de su contenido, sino de su forma lógica, ¿podemos decir entonces que el punto de vista modal es el correcto, y que la matemática no tiene propiamente ningún contenido? Al respecto, sería ilusorio esperar una explicación única y excluyente de la matemática: en la práctica, las interpretaciones *extensional* y *modal* de las teorías matemáticas son intercambiables; digamos, con un mismo poder explicativo. Si una de ellas se considera como primaria, la otra se deriva de ella en su totalidad, y viceversa. Así, al considerar cualquier esquema abstracto de la lógica modal de la forma

$$\square(Ax' \rightarrow E')$$

(en el que E' es un enunciado construido con la constante c y los predicados I, M, P y S recién señalados), al aplicar a la inversa las reglas de sustitución precedentes, podemos formar un enunciado E que afirma una propiedad de los números naturales. Este enunciado se sigue de principios lógicos aritméticos (los axiomas) tenidos por verdaderos. Por tanto, no podemos decir que una interpretación es superior a la otra en cuanto a su poder o alcance, al menos respecto a la matemática existente.[8] En última instancia, la postura que se adopte dependerá de la imagen producida al formular los enunciados matemáticos; en un caso se estará pensando en propiedades de objetos eternos, en el otro, en proposiciones lógicamente necesarias. Lo único que todo esto muestra es que para "hacer matemáticas" no es forzoso inclinarse en favor de alguna de estas posturas, aunque en la práctica sea el platonismo la imagen más socorrida. Por lo demás, cada una de estas interpretaciones se puede utilizar para clarificar a la otra, si bien aquí no ahondaremos en tales cuestiones.[9]

En resumen: en vez de hablar de respuestas definitivas acerca de la naturaleza de la matemática, lo que podemos hacer es hablar de *preferencias*. Podemos, por ejemplo, ver en los números naturales "posibilidades permanentes de selección", es decir, trabajar, si así se desea, como si tales números tuvieran existencia propia (véase Putnam, 1983). No obstante, esta posibilidad no nos debe confundir: la esperanza de una explicación única y excluyente de la matemática es cosa del pasado, por siempre perdida.

Todo lo anterior sugiere la imposibilidad de llegar a un único fundamento para la matemática por este camino. Creemos que se trata de una tarea que la filosofía de la matemática no podrá resolver. Por el contrario, el cometido de esta disciplina consiste en articular la experiencia matemática en un todo coherente, entendiéndola como un producto cultural y social con múltiples vertientes, en vez de buscar conceptuarla desde un único punto de vista excluyente.

8 Ciertamente, no podemos decir que la interpretación modal sea equivalente a la platónica. Por ejemplo, para la primera no tiene sentido preguntarse por la verdad de la hipótesis del continuo, mientras que para la segunda sí lo tiene. No obstante, estas diferencias sólo atañen a la percepción que tiene el matemático del sentido de la teoría, no a los resultados en sí, los cuales pueden presentarse bajo ambas modalidades.

9 Estamos frente a un problema filosófico propio de los sistemas que se han construido como explicación de la matemática, ante el cual ella debería permanecer impasible. Al respecto, queremos advertir que la matemática se sostiene en última instancia en sí misma, en su práctica y aplicaciones, sin la necesidad de un fundamento (en sentido fuerte) para proseguir su quehacer. En este sentido nos unimos a Reuben Hersh cuando afirma: "Muchas de las dificultades y trabas en la filosofía de la matemática son el resultado de prejuicios filosóficos que estamos en libertad de descartar si así lo deseamos. En tal caso, muchas de nuestras dificultades filosóficas simplemente desaparecerán; otras, se convertirán en problemas tangibles que podrán investigarse de manera sistemática, con una esperanza razonable de prosperar" (Hersh, 1988: 11).

Una postura alterna

Queremos dejar en claro lo siguiente:

i) Que en nuestra opinión la matemática no se puede fundamentar sobre una explicación de la naturaleza de sus teorías y objetos. Como hemos visto, en este dominio es posible asumir puntos de vista opuestos que, sin embargo, no se pueden anular entre sí. Tener explicaciones divergentes igualmente factibles en relación con los resultados matemáticos muestra la irrelevancia de adoptar un punto de vista como justificación o explicación de la naturaleza y origen de la matemática.

ii) Asimismo, que, en nuestra opinión, la matemática no es susceptible de un fundamento en el sentido que Russell, Hilbert o Brouwer le dan al término. Al respecto, creemos algo más: que no lo necesita. En todo caso, los hechos apuntan más bien hacia la idea de que los programas tradicionales de fundamentación se han equivocado al referirse a la matemática como algo ahistórico e inmutable, capaz de una explicación global definitiva. En esto nos unimos a autores como Lakatos, Putnam y Tymoczko, quienes sostienen que uno de los dogmas de la filosofía tradicional de la matemática ha sido el de dotar a las matemáticas de un fundamento (en el sentido fuerte del término). Este dogma lo debemos desechar como cosa del pasado. Como alternativa, se propone una filosofía de las matemáticas que coloque en el centro de sus consideraciones la práctica matemática misma. ¿Por qué excluir todo aquello que los fundamentistas miran con desdén? ¿Acaso la actividad matemática se reduce a descubrir nuevas verdades acerca de los objetos matemáticos y a verificar pruebas? ¿Dónde quedan las pruebas informales, la intuición, el desarrollo histórico de los conceptos y las teorías, los errores y experimentos matemáticos, las explicaciones que buscan no sólo convencer, sino comunicar el significado del trabajo matemático (en el sentido sugerido por Gian-Carlo Rota)?[10] ¿Dónde quedan el uso de nuevas tecnologías, la estética matemática y el papel del sujeto en la construcción del conocimiento matemático? Para estas cuestiones, la filosofía tradicional no ofrece respuestas, como si la matemática no fuera un producto humano, algo con una historia. Vemos en esta omisión la razón por la cual las escuelas tradicionales (logicismo, formalismo e intuicionismo) han fracasado en sus esfuerzos por dar una explicación

[10] Véase Rota (1996), especialmente el capítulo XI.

integral de esta disciplina: la matemática no es algo estático, sino un producto social que evoluciona y posee un contenido cultural. También vemos en su carácter histórico una explicación de los fracasos por explicarla como una fría disciplina encumbrada en lo más alto del pensamiento racional. Más allá de una fría actividad racional, vemos en ella un producto humano similar al arte. Si en algo tuvo razón Hermann Weyl fue al escribir: "'Hacer matemáticas' puede que sea una actividad creadora del hombre, como la música, cuyos productos en forma y en sustancia están condicionados por la historia y por ello impiden una racionalización objetiva completa" (Weyl, 1949; cita tomada de la traducción al español, p. 251).

Si tomamos en cuenta lo anterior, entenderemos por qué en la actualidad la expresión fundamentos de la matemática se maneja en un sentido diferente, en el que se renuncia a la búsqueda de un principio espistemológico con el cual justificar las distintas teorías matemáticas (segundo sentido del término). Se trata de un propósito menos ambicioso que buscaría examinar la matemática en sus distintas modalidades. En esto, la filosofía, al lado de la lógica, tiene su lugar: su tarea consiste en contribuir al análisis de los conceptos y los usos de la matemática, a su evaluación crítica. Mas ya no se trata de un discurso que habla a nombre de una filosofía reinante, sino, como dijera Bachelard, de una reflexión instruida que se ocupa de examinar la matemática desde su interior.

Un ejemplo: la crítica constructivista

Hablar del constructivismo en matemáticas puede significar distintas cosas, aunque todas ellas comparten la idea de que los objetos matemáticos deben ser construidos realmente (a diferencia de la matemática clásica, que se conforma con una prueba indirecta de su existencia). En ocasiones, el término se utiliza para indicar la evitación del axioma de elección; en otras, para referirse a la construcción y análisis de algoritmos con el propósito de utilizarlos en la computadora. En estas páginas por *constructivismo* entendemos todo enfoque que se ocupe de la posibilidad de producir los objetos matemáticos mediante una construcción finita.[11]

[11] Al respecto, no debemos confundir constructivismo e intuicionismo: el primero no necesariamente adopta el radicalismo epistemológico de Brouwer sino que, en su forma general, se ocupa de explorar las posibilidades constructivas de la matemática sin legislar acerca de lo que es legítimo en esta disciplina.

En los años recientes el constructivismo ha desempeñado un importante papel en el examen de los fundamentos de la matemática. Su crítica, apoyada en todo momento en el contenido de esta disciplina, ha permitido ahondar en el uso de métodos efectivos, en detrimento de aquéllos trascendentales de la matemática transfinita, dejándonos una clara percepción de su utilidad (véase Aberth, 1985; Bishop, 1985; Kushner, 1985; y Troelstra y van Dalen, 1988). Por ejemplo, en la teoría de los números las pruebas constructivas han permitido obtener límites cuantitativos superiores a las estimaciones derivadas de los métodos no efectivos. De hecho, la insistencia del constructivismo en el carácter efectivo de los procedimientos tiene por sí misma un sentido filosófico: ¿cómo hacer compatibles la teoría y la práctica matemática?, ¿cómo dar cuenta de la práctica que justifica una teoría?, ¿la objetividad de las matemáticas reside en los objetos de la teoría o en los actos constructivos del matemático? El constructivismo intenta una respuesta precisa a los mecanismos internos de cada teoría y apunta hacia una cuestión que va más allá de los problemas domésticos de la matemática: la de explicar su lugar en el conjunto del conocimiento, desde la física hasta las ciencias sociales. Ahí está, por ejemplo, el estudio de Peter Smith (2003) acerca de la manera en que la física se sirve del análisis matemático. Una conclusión a la que llega es la siguiente: la noción clásica de función continua, cuyo valor teórico es innegable en la edificación del análisis matemático, es sustituible en la práctica por la correspondiente noción constructiva de función continua con los mismos resultados observables. En otras palabras, es posible elaborar otros modelos del "mundo real" con base en nociones alternativas (función constructiva, número construible, etcétera) y trabajar con los correspondientes teoremas (por ejemplo, el teorema constructivo del valor intermedio, en el que todos los valores intermedios que corresponden a magnitudes físicas reales medibles corresponden también a valores medibles del tiempo) de modo que en el ámbito experimental las predicciones sean similares. Esto plantea la cuestión de si en la práctica será necesaria una noción tan general como la de función continua de variable real, y también la de la ventaja de utilizar nociones constructivas que desde el punto de vista computacional son más fáciles de manejar. También aclara la relación existente entre nuestros modelos matemáticos y el "mundo real".

Un estudio de esta naturaleza, conforme a las expectativas que se traza, merece un lugar privilegiado en el contexto de los fundamentos de la matemática. No obstante, esta manera de proceder modifica el sentido que se le dio al término *fundamentos* durante casi todo el siglo XX. Ya no se trata de adoptar un punto de vista radical desde el cual juzgar y sancionar todos los demás, sino de explorar y comparar las distintas tendencias que coexisten dentro de la matemática, desde el ultrafinitismo hasta el platonismo radical, de entender la estructura de la matemática y su función en el dominio de la ciencia.

Podemos decir entonces lo siguiente: si por *fundamentos* se entiende lo dicho en relación con el proyecto de Frege y Russell, o con el programa de Hilbert, la idea de que la matemática necesita de un fundamento es equívoca; pero si, en cambio, lo que se entiende es "dar cuenta de la matemática en el contexto del saber en general", la matemática merece un fundamento, aunque esto equivalga a modificar el sentido que se le ha dado tradicionalmente al término.

En todo caso, estas reflexiones deberían ser suficientes para convencernos de que la matemática, al igual que muchos otros dominios del saber, no requiere ningún fundamento en el sentido fuerte del término. La historia así lo demuestra.

Bibliografía

Aberth, Oliver

1985 *Computable Analysis*, McGraw-Hill, Nueva York.

Benacerraf, Paul, y Hilary Putnam

1983 *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, segunda edición.

Bishop, Errett

1985 *Foundations of Constructive Mathematics*, Springer-Verlag, Berlín.

Brouwer, Luitzen Egbertus Jan

1975 "The unreliability of the logical principles", traducción al inglés de Arend Heyting, en Heyting, 1975, pp. 107-111 ["De onbetrouwbaarheid der logische principes", en *Tijdschrift voor wijsber-geerte*, vol. 2, 1908, pp. 152-158].

1983 "Intuitionism and Formalism", en Benacerraf y Putnam, *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, segunda edición, pp. 77-89 [en *Bulletin of the American Mathematical Society 20*, 1912].

Curry, Haskel B.

1977 *Foundations of Mathematical Logic*, Dover Publications, Nueva York.

Gödel, Kurt

1951 "Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications", en S. Feferman, *et al.*, eds., *Kurt Gödel Collected Works*, vol. 3, pp. 304-323.

1967 "On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems I", en Jean van Heijenoort, *From Frege to Gödel, a Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard University Press, Cambridge, pp. 596-616.

Heijenoort, Jean van

1967 *From Frege to Gödel, a Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard University Press, Cambridge.

Hersh, Reuben

1988 "Some proposals for reviving the philosophy of mathematics", en Thomas Tymoczko, *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Birkhäuser, Boston, Basel y Stuttgart, pp. 9-28.

Heyting, Arend

1975 *L. E. J. Brouwer Collected Works 1; Philosophy and Foundations of Mathematics*, North-Holland, Amsterdam.

Hilbert, David

1962 *Foundations of Geometry*, traducción al inglés de E. J. Townsend con algunas adiciones hechas por Hilbert a la edición francesa de 1899, La Salle, Open Court Publishing [*Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig y Berlín, 1899],

1967 "The foundations of mathematics", traducción al inglés de Stefan Bauer-Mengelberg y Dagfinn Føllesdal: , en Heijenoort, 1967, pp. 464-479 ["Die Grundlagen der mathematik", en *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburggischen Universität*, vol. 6 (1928), pp. 65-85].

1993a *Fundamentos de las matemáticas* (recopilación), Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México (Colección MATHEMA), México.

1993b "La nueva fundamentación de las matemáticas", traducción al español de Luis Felipe Segura, en Hilbert, 1993a, pp. 37-62 ["Neubegründung der Mathematik", en Hilbert, 1935, vol. 3, pp. 157-177].

1993c "Acerca del infinito", traducción al español de Luis Felipe Segura, en Hilbert, 1993a, pp. 83-121 ["Über das Unendliche", *Mathematische Annalen*, núm. 95 (1926) pp. 161-190].

Kushner, Boris

1985 *Lectures on Constructive Mathematical Analysis*, American Mathematical Society, Providence.

Lakatos, Imre

1967 *Problems in the Philosophy of Mathematics*, North-Holland, Amsterdam.

1978 *Philosophical Papers*, editado por J. Worrall y G. Currie, Cambridge University Press, Cambridge, 2 vols.

Poincaré, Jules Henri

1963 *Ciencia y método*, traducción al español de M. García Miranda y L. Alonso, Espasa-Calpe (Colección Austral, núm. 409), Madrid, 3a. edición [*Science et methode*, Flamarion, París, 1908].

Putnam, Hilary

1983 "Mathematics without foundations", en Paul Benacerraf y Hilary Putnam, *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2a. edición, pp. 295-311.

Rota, Gian-Carlo

1996 *Indiscrete Thoughts*, Birkhäuser, Boston.

Russell, Bertrand

1901 "Recent work in the principles of Mathematics", en *International Monthly*, vol. 4, pp. 75-93.

1906 "Les paradoxes de la logique", en *Revue de métaphysique et de morale*, vol. 14, pp. 627-650.

1960 *Introduction to Mathematical Philosophy*, George Allen and Unwin, Londres, décima edición [1919].

1967 *Los principios de las matemáticas*, traducción al español de Juan Carlos Grimberg, Espasa Calpe, Madrid [*The Principles of Mathematics*, Cambridge University Press, Londres, 2a. edición, 1937, 1903].

Russell, Bertrand, y Alfred Whitehead

1967 *Principia Mathematica* (*To *56)*, Cambridge University Press, Londres, 4a. edición [1910].

Smith, Peter

2003 "Constructivism Exploded?", en *Analysis*, vol. 63, núm. 279, julio, pp. 263-265.

Troelstra, A. S., y D. van Dalen

1988 *Constructivism in Mathematics, an Introduction*, North-Holland, Amsterdam, 2 vols.

Tymoczko, Thomas

1988 *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Birkhäuser, Boston, Basel and Stuttgart.

Weyl, Hermann

1949 *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton University Press [traducción al español de Carlos Ímaz, *Filosofía de las matemáticas y de la ciencia natural*, Centro de Estudios Filosóficos, Universidad Nacional Autónoma de México, 1965].

Zermelo, Ernst

1908 "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I", en *Mathematische Annalen* 65, pp. 261-281 [traducción al inglés de Stefan Bauer-Mengelberg, "Investigations in the foundations of set theory I", en van Heijenoort 1967, pp. 200-215].