La matemática como sintaxis

*Max Fernández de Castro T.**

IZTAPALAPA
Agua sobre lajas

Resumen: En este artículo se examina la posición de Carnap en 1934 en torno a la filosofía de las matemáticas. Se argumenta que las interpretaciones tradicionales o más sencillas de *La sintaxis lógica del lenguaje*, a este respecto, están equivocadas. Se ofrece una nueva interpretación, más compatible con otras tesis de Carnap, que muestra la originalidad de sus planteamientos.
Palabras clave: Carnap, matemáticas, Gödel, sintaxis, lógica.

El título de este trabajo hace alusión al proyecto que Carnap intentó desarrollar, y que llevó a cabo hasta cierto punto, en *La sintaxis lógica del lenguaje* (SLL).** El libro fue publicado en 1934, tres años después de la aparición de los célebres teoremas de incompletud de Gödel, que marcaron un viraje en la reflexión en torno a los fundamentos de las matemáticas. Pertenece, por tanto, a un horizonte de pensamiento distinto de aquel en el que fueron desarrollados los programas de fundamentación clásicos. Para utilizar una broma de Hintikka, podemos decir que es una de las primeras obras filosóficas de la posmodernidad, es decir, posgödelianas. Respecto a la filosofía de las matemáticas, la opinión que domina actualmente es que las tesis de Carnap en este periodo están definitivamente refutadas por los mismos resultados de Gödel y por las críticas de Quine a la distinción entre enunciados analíticos y sintéticos. No pretendo oponerme del todo a este veredicto contundente. Mis objetivos son más

* Profesor investigador del Departamento de Filosofía de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. xamf_mx@yahoo.com
** Algunos párrafos de este artículo aparecen en mi libro *Quine y la ontología abstracta*, Universidad Autónoma Metropolitana-Porrúa, México, 2003. Agradezco al doctor Sílvio Pinto las observaciones hechas a una versión previa de este trabajo y al doctor Axel Barceló la lectura de la misma.

FECHA DE RECEPCIÓN 13/05/03, FECHA DE APROBACIÓN 21/11/03

bien los siguientes: a) subrayar el carácter sui géneris de la propuesta de Carnap en el debate entre fundamentistas y sus adversarios; b) explicar por qué Carnap pudo en 1934 defender una interpretación sintáctica de las matemáticas; c) sugerir una lectura radical de la obra y situar, a partir de ella, las críticas de Quine y Gödel, y d) mostrar en qué sentido la propuesta de Carnap es una "síntesis" de los programas logicista y formalista en la época "posmoderna".

La solución general de Carnap al problema de los universales

En esta sección inicial esbozaré las líneas centrales de la obra, al menos aquellas que espero sean suficientes para entender la discusión posterior. La estrategia general de Carnap para el tratamiento de algunos problemas filosóficos, no solamente durante el periodo en que escribió la SLL, sino en lo sucesivo, está formulada con mucha claridad en su artículo de 1950 "Empirismo, semántica y ontología" (ESO) (Carnap, 1950). El problema que allí enfrenta es cómo un empirista puede emplear coherentemente un lenguaje que hace referencia a entidades abstractas, los números o los conjuntos por ejemplo, las cuales por definición no se encuentran en la percepción inmediata ni pueden ser definidas en términos de predicados de entidades inmediatamente perceptibles. El empirista debe aparentemente rechazar la ciencia.

Carnap intenta mostrar que éste es un falso problema, recurriendo a la noción de cuadro o sistema lingüístico. Se trata de un sistema o lenguaje constituido por reglas explícitas para la formación y verificación, demostración o refutación de enunciados, cuyas variables corren sobre dominios que contienen las entidades abstractas en cuestión. Una vez que se ha establecido un cuadro, existen en relación con él dos tipos de cuestiones existenciales. Las primeras, las internas, tienen respuestas expresables dentro del cuadro y para cuya confirmación o refutación el cuadro provee reglas. Las segundas, las externas, tratan –dice Carnap– "del sistema de entidades considerado como un todo". Por ejemplo, con respecto a una axiomatización clásica de la aritmética de Peano, la pregunta de si todo número se descompone en producto de primos es una cuestión interna, mientras que la interrogación de si existen los números (independientemente de todo cuadro o lenguaje) es un asunto externo. Es cierto que el matemático podría expresar en este lenguaje la afirmación de que los números existen,[1] pero ésta sería

[1] Por ejemplo, con un enunciado del lenguaje formal del tipo "$(\exists x)(x=x)$" o bien de la forma "$(\exists x)N(x)$" si "$N(x)$" es un predicado formal correspondiente al predicado "x es un número", los cuales serían consecuencias lógicas de "$(0=0)$" y de "$N(0)$" respectivamente.

trivialmente demostrable y no correspondería a la pregunta metafísica planteada. Los enunciados del sistema, es decir, aquellos que responden a cuestiones internas, pueden ser analíticos o sintéticos, según si las reglas del cuadro bastan para determinar su valor de verdad, o que para ello también la experiencia resulte necesaria. Las cuestiones externas, puesto que no pertenecen a un sistema que provea los medios para verificar o refutar sus posibles respuestas, carecen –según Carnap– de contenido cognitivo.

La solución formulada en ESO al problema que se plantea al empirista es, entonces, la siguiente: el científico no está obligado a aceptar (o a rechazar) la existencia metafísica de las entidades abstractas a las que su lenguaje hace referencia, pues la adopción de un cuadro es un prerrequisito a la formulación de enunciados existenciales. En cambio si aceptará (o rechazará) la existencia, en un sentido científico, de tales entidades si hay procedimientos de verificación o de demostración, sancionados por las reglas de su cuadro, de los correspondientes enunciados existenciales. La puesta en práctica de esta idea atravesó dos periodos en la obra de Carnap. En el primero,[2] que es al que habremos de referirnos ahora, la idea es aplicada sólo a sistemas cuyas reglas son de naturaleza sintáctica y se encuentra formulada en la siguiente cita de 1935:

> La realidad de cualquier cosa no es nada más que la posibilidad de su ser colocado en un cierto sistema... y tal cuestión [relativa a la existencia] tiene sentido sólo si se refiere a elementos o partes, no si se refiere al sistema mismo (Carnap, 1996: 20).

Es interesante hacer algunas observaciones a este respecto:

a) Esta solución supone que el científico tampoco niega la existencia "metafísica" de las entidades a las que su cuadro hace referencia. Para él ni tales afirmaciones absolutas ni sus respectivas negaciones tienen sentido. Las únicas cuestiones existenciales que tienen sentido son internas al cuadro; por ello Carnap insistió, en las discusiones del Círculo de Viena, en que las llamadas tesis materialista e idealista relativas a la existencia del mundo son ambas solamente pseudotesis (Carnap, 1991: 51).
b) Esta solución supone una relatividad ontológica en un sentido distinto del de la tesis de Quine. Los cuantificadores tienen un significado que depende del sistema lingüístico al que pertenecen. En efecto, a pesar de que

[2] Que comenzó tal vez alrededor de 1931 y culminó unos pocos años después de la publicación de *The Logical Syntax of Language*. Véase Carnap (1991: 53 y 56).

Carnap acepta el uso de la palabra "ontología" para denotar al dominio de variación de las variables, no hay para él, en última instancia, compromiso ontológico. Por ejemplo, el matemático no podrá deducir de un teorema que enuncia la existencia de un número con determinadas características el enunciado de que los números existen, si éste es comprendido como una proposición sin referencia al lenguaje en que fue demostrado. Sus aserciones no tienen más sentido que el que les otorgan las reglas del sistema en que se encuentran inmersas. Por ello, con respecto a un cuadro L definido, podríamos decir que sus enunciados sintéticos son equivalentes "a un constructo lógico de términos que se refieren a la experiencia inmediata"[3] y que sus enunciados analíticos o contradictorios aluden a la existencia de una derivación a partir de las convenciones que regulan el uso de los símbolos de L.

c) ESO aborda las cuestiones existenciales, pero es congruente con el pensamiento de Carnap aplicar la idea central de este artículo a otros problemas filosóficos.

En defensa de la propuesta central de ESO, digamos algunas palabras sobre los argumentos que pudieron haberla motivado. En su autobiografía, Carnap (1991: 45) dice que desde muy joven se sorprendía de que las controversias filosóficas, en contraste con las científicas, estaban plagadas de malentendidos y vaguedades que hacían imposible zanjar las diferencias entre los oponentes. No había criterios claros que pudiesen llevar a una decisión sobre quién tenía la razón y por ello las disputas eran estériles. Bajo la influencia de Wittgenstein, los miembros del Círculo de Viena buscaron criterios de significación y creyeron encontrarlos en el principio de verificación o en variantes sofisticadas del mismo. No es necesario que entremos ahora en este delicado asunto, basta señalar que la idea central de ESO es más general: si los científicos o filósofos logran entenderse mutuamente, de manera tal que las afirmaciones de uno puedan ser corroboradas, refutadas o simplemente creídas por el otro, es porque éstas se hallan enmarcadas en un sistema de reglas más o menos implícito que regula su uso. Dicho de otro modo, si una controversia es útil es porque los oponentes parten de una base común que comprende una serie de regulaciones más o menos tácitas en cuanto al uso de términos y enunciados. La propuesta de Carnap es que esta base se haga

3 Para emplear la fórmula de Quine caracterizando el segundo dogma del empirismo, véase Quine (1951).

explícita desde el inicio, para evitar así cualquier malentendido. Él pensaba que las ciencias seguirían esta tendencia, ya manifiesta en algunas de ellas, hacia la formalización. Podría, sin embargo, objetarse que su propuesta no es tan neutral como las líneas anteriores lo sugieren, sino que ciertas posturas filosóficas están implícitas en ella, tales como, por ejemplo, la defensa del principio de verificación. Esto dependerá de qué interpretación adoptemos de la obra de Carnap, pero éste es un tema al que regresaremos más adelante.

El proyecto de la SLL

Veamos ahora cómo aparece aplicada esta idea en la SLL. En otro párrafo de su autobiografía, Carnap pone de manifiesto el origen de la tesis que defiende en esta obra:

> En nuestras discusiones del Círculo de Viena resultó que cualquier intento de formular más precisamente los problemas filosóficos en los que estábamos interesados finalizaba en problemas de sintaxis lógica del lenguaje (Carnap, 1991: 55).

El análisis lógico es el de los enunciados científicos o del lenguaje ordinario para encontrar su sentido y sus conexiones o, más específicamente, para determinar su método de verificación o la manera en la cual podemos estar seguros de su valor de verdad. Dos objetivos de la SLL son:

a) sugerir que, una vez que la psicología ha pasado a formar parte de las ciencias y que la metafísica se ha revelado como carente de sentido, a la filosofía no le queda otra tarea legítima que el análisis lógico del lenguaje,
b) mostrar que para esta labor basta la disciplina llamada sintaxis lógica, la cual estudia las expresiones de un lenguaje desde un punto de vista formal, es decir, que considera únicamente al orden y tipo de los símbolos que las constituyen, sin tomar en cuenta sus significaciones.

¿Por qué Carnap piensa que un estudio "sintáctico" es suficiente para el análisis lógico? En parte porque está interesado en lenguajes formales en los cuales la definición de *enunciado* puede ser dada en términos sintácticos; y en parte porque cree que la relación entre enunciados que es más relevante para el principio de verificación, la de consecuencia lógica, puede ser definida sintácticamente (en ese tipo de lenguajes). Esta última aserción es aún imprecisa, pues los términos *lógica* y *sintaxis* no tenían en la SLL el mismo significado que hoy día, como veremos en lo sucesivo.

Si atendemos tanto a lo que Carnap anuncia al principio de la obra como a lo que realmente hace en ella, podríamos resumir así el propósito general de la SLL: mostrar que es posible construir lenguajes formales regulados sólo por reglas sintácticas explícitas y que en ellos sea expresable la ciencia en su conjunto o grandes fragmentos de la misma. Las reglas sintácticas determinarán cuáles de las expresiones del lenguaje en cuestión son enunciados (reglas de formación) y cuándo se dan entre éstos relaciones inferenciales (reglas de transformación). Carnap mostrará entonces que ciertas tesis tradicionales de la filosofía son inexpresables en estos lenguajes (por ejemplo, las que hacen alusión a lo absoluto), que otras podrán ser reformuladas, o "explicadas", como aserciones sintácticas relativas a lenguajes de este tipo (verbi gratia las referentes a la noción de significado), mientras que una tercera categoría comprenderá "tesis" que pueden considerarse, en el mejor de los casos, como sugerencias para la construcción de sistemas lingüísticos (por ejemplo, las que pretenden enunciar la esencia del número). En un principio, parecería deseable disponer de un solo lenguaje para la totalidad de la ciencia, que comprendiera (quizá a través de algún método de codificación) una formalización de su propia sintaxis. Carnap anuncia al inicio de la obra[4] que este objetivo puede alcanzarse, pero más adelante demuestra que algunos conceptos sintácticos relativos a un lenguaje no son definibles en ese mismo lenguaje.

Para aclarar el párrafo anterior, recordemos primeramente que Carnap llama "explicación" a la sustitución de una noción vaga (el *explicandum*) por un concepto preciso (el *explicatum*), definido en un cuadro lingüístico bien delimitado. Un ejemplo paradigmático es la definición de número en *Principia Mathematica*, que explica la noción homónima de nuestro lenguaje ordinario. En general, una explicación puede ser evaluada conforme a dos factores: por la utilidad del *explicatum* en el quehacer científico y por su adecuación al *explicandum.* Ambos son vagos, pues dependen de los fines del investigador, y el segundo resulta de una comparación entre un concepto riguroso y una noción imprecisa. En este sentido, algunas nociones científicas serán explicadas dentro de cuadros bien definidos, mientras que ciertas nociones filosóficas, como la de *significación* o la de *necesidad*, admitirán explicaciones más o menos satisfactorias a través de conceptos metalingüísticos relativos a esos cuadros.

Carnap ilustra su propósito en la SLL con dos ejemplos concretos, los sistemas I y II. Sólo mencionaré sus características más sobresalientes en relación con nuestro tema: a) en I es expresable una parte de la aritmética elemental, que satisface ciertas exigencias de los intuicionistas, mientras que en II lo es el todo de la ma

[4] Véase, por ejemplo, p. 53.

temática clásica; b) las reglas de transformación de estos sistemas son de dos tipos: finitarias e infinitarias o, como Carnap lo dice, definidas e indefinidas; c) tanto para I como para II es dada una definición sintáctica y recursiva de lo que es un enunciado lógico del sistema, de tal manera que todas las formalizaciones de enunciados lógicos o matemáticos, en el sentido ordinario de estos términos, son lógicas según estas definiciones;[5] d) en ambos casos es provista una definición "sintáctica" (según Carnap) de "enunciado analítico", de tal manera que todo enunciado lógico del sistema que es verdadero en su interpretación estándar resulta analítico, y viceversa. De a), c) y d) se sigue que, con la definición de "enunciado analítico de II", Carnap ha dado una caracterización sintáctica del conjunto de enunciados verdaderos de la matemática clásica. Para ello, desde luego, recurre a las procedimientos infinitarios. Ya en I presenta una axiomatización completa de la aritmética formalizable en el sistema, pero se vale para ello de la ω-regla, como regla de inferencia. En II, por otro lado, para determinar si una fórmula es analítica, la definición prescribe una serie de transformaciones estrictamente morfológicas que ésta debe sufrir hasta llegar a una de dos formas posibles, pero los pasos de este proceso requieren consideraciones que hoy llamaríamos más bien semánticas y que comprenden, por ejemplo, tomar en cuenta todas las propiedades de elementos del conjunto {"0", "1", "2",...}.

Con base en estos rasgos, debemos preguntarnos ahora qué se ha logrado con esta caracterización supuestamente sintáctica de la validez de los enunciados de la matemática clásica. Antes que nada, aclaremos que la definición de *enunciado analítico* para ambos sistemas de lenguaje es sintáctica, en el sentido que Carnap daba a esta palabra:

> Por la SINTAXIS LÓGICA de un lenguaje, queremos decir la teoría formal de las formas lingüísticas de ese lenguaje –el enunciado sistemático de las reglas formales que lo gobiernan, junto con el desarrollo de las consecuencias que se siguen de esas reglas. [Más adelante, agrega] [u]na teoría, una regla, una definición o similar debe ser llamada *formal* cuando ninguna referencia es hecha en ella al significado de los símbolos (por ejemplo, las palabras) o al sentido de las expresiones (por ejemplo, los enunciados), sino simple y únicamente a los tipos y orden de los símbolos de las cuales las expresiones están construidas (Carnap, 1937: 1).

[5] Sin embargo, hay que recordar que los términos *lógico* y *matemático* tienen aquí dos sentidos distintos, según se trate de I o de II. En el primero se refiere a la lógica intuicionista y, en el segundo, a la clásica.

Tanto la ω-regla como los procesos de evaluación de fórmulas en II son, en este sentido, plenamente sintácticos. Hoy día, en la definición de sintaxis incluimos no sólo su objeto de estudio, es decir, las expresiones de un lenguaje en abstracción de todo lo que no sea el tipo y orden de los símbolos que las constituyen, sino también una serie de métodos admisibles para tal efecto, los cuales, según nuestras preconcepciones, deben ser finitarios. Sin embargo, hay muchos indicios para suponer que ésta no era la concepción dominante de la sintaxis en los años en que fue concebida la obra que analizamos. Debemos matizar esta observación, pues Carnap divide las reglas en definidas e indefinidas; en el primer tipo se encuentran únicamente las de carácter finitario. Además, y éste es un punto importante, él aclara que toda demostración matemática debe ser definida. Así, por ejemplo, la prueba de que un enunciado es consecuencia de un conjunto de premisas por la ω-regla debe darse en el metalenguaje por un procedimiento definido (es decir, finitario):

> ...cualquier demostración de la aplicabilidad de cualquier término está últimamente basada sobre una derivación [es decir, en un procedimiento recursivo]. Aun la demostración de la existencia de una relación de consecuencia –es decir, la construcción de una serie-consecuencia en el lenguaje-objeto– puede sólo ser alcanzada por medio de una derivación (una prueba) en el lenguaje sintaxis [es decir, en el metalenguaje] (Carnap, 1937: 39).

Como puede observarse, el proyecto de la SLL es una combinación de los programas logicista y formalista. Sin embargo, como veremos más adelante, Carnap no puede ser situado en ninguna de las escuelas clásicas de fundamentación.

Digamos brevemente en qué sentidos un cuadro provee explicaciones de nociones científicas o filosóficas. El primer caso es sencillo; por ejemplo, II provee una explicación satisfactoria de la noción de conjunto, según cierta preconcepción de ésta. Para el segundo caso, Carnap muestra que ciertos enunciados que aparentemente tratan de objetos se revelan, después de una traducción adecuada al lenguaje sintáctico (o metalenguaje), como enunciados relativos a la sintaxis de designaciones de objeto. Un enunciado que admite esta traducción al lenguaje sintáctico es llamado *cuasi-sintáctico.* Más precisamente, (Carnap, 1937: 234) una cualidad P es llamada paralela a una propiedad Q si, cada vez que un objeto detenta la propiedad Q, su designación posee la propiedad P. Supongamos dados un lenguaje-objeto y un metalenguaje (o lenguaje-sintaxis, como lo llama Carnap) correspondiente. Un enunciado de lenguaje-objeto de la forma Q(a) es cuasi-sintáctico si la propiedad expresada por Q tiene una propiedad sintáctica paralela expresable en el lenguaje-sintaxis correspondiente.

El enunciado cuasi-sintáctico es también llamado *enunciado pseudoobjeto.* Se dice que está formulado en el *modo material de hablar,* por oposición al enunciado sintáctico correspondiente, que está formulado en el *modo formal.* Por ejemplo, en el lenguaje ordinario, el enunciado "cinco es un número", es un enunciado pseudo-objeto, pues puede ser traducido en el lenguaje-sintaxis por el enunciado "'cinco' es un numeral". Sin duda, toda proposición del lenguaje ordinario que trata de un objeto puede ser traducida por un enunciado que trata de su designación. (1) "Homero es un artista" tiene el mismo valor de verdad que (2) "'Homero' es la designación de un artista". Pero (1) no es un enunciado cuasi-sintáctico, pues (2) no es un enunciado sintáctico. Para conocer el valor de verdad de (2), la experiencia (más allá de la mera comprobación de la ocurrencia de expresiones en un documento) es necesaria.[6] Conviene igualmente precisar que un enunciado del lenguaje ordinario o del empleado por los filósofos es también calificado por Carnap como cuasi-sintáctico si puede ser parafraseado por un enunciado sintáctico relativo a un lenguaje formal dado (o sobrentendido). Por ejemplo, una vez dada la definición sintáctica de *consecuencia* para II, las siguientes definiciones son provistas.

Un enunciado es analítico o necesario si es consecuencia de la clase vacía. El contenido de un enunciado es el conjunto de todas sus consecuencias no analíticas. Dos enunciados son sinónimos si su contenido es idéntico. Dos expresiones numéricas son sinónimas si, al reemplazar una por otra en cualquier enunciado, se obtiene un enunciado sinónimo. De esta manera, los enunciados filosóficos "los enunciados lógicos tienen contenido nulo" y "las matemáticas están constituidas de verdades analíticas" son cuasi-sintácticos relativos a II. Reciben una explicación, conveniente según ciertas escuelas de pensamiento, no en II pero sí en su metalenguaje (o lenguaje sintaxis).

Interpretaciones de la SLL con respecto a las matemáticas

Volvamos ahora a la cuestión de las matemáticas en la SLL. En septiembre de 1930, en la misma sesión en que Gödel hizo la primera alusión a su célebre teorema de incompletud, Carnap (1931)[7] había expuesto y defendido la posición logicista, cuyas tesis principales son, en su propia formulación: a) que los conceptos matemá-

6 "Sintaxis" se refiere aquí a lo que Carnap entendía como la sintaxis pura, pues también existe una sintaxis aplicada, en la que puede intervenir la experiencia.

7 Puede consultarse la traducción inglesa: "The logicist foundation of Mathematics", en Benacerraf, y Putnam (1983: 41-51).

ticos son definibles en términos de conceptos de la lógica; y b) que los teoremas matemáticos pueden ser demostrados a partir de los principios lógicos por deducciones puramente lógicas. A los problemas encontrados por Whitehead y Russell en *Principia Mathematica*, a saber, que los axiomas de reductibilidad, del infinito y de elección no pertenecen a la lógica, Carnap creía haber encontrado una solución satisfactoria. Respecto al primero, Ramsey había mostrado que la teoría de tipos simple bastaba para fundamentar la matemática. Respecto a los otros dos, Carnap había propuesto una interpretación que los convertía en analíticos. A pesar de que en toda la SLL la matemática no se distingue de la lógica o, más precisamente, de que cualquier concepto matemático que es formalizable en algún sistema de la SLL, lo es mediante un concepto lógico, no es posible afirmar sin grandes reservas que la posición de Carnap es el logicismo. La razón principal es que la obra sostiene el principio de tolerancia, una de cuyas formulaciones es:

> En lógica no hay máximas (*morals*). Cada quien está en libertad de construir su propia lógica, i. e., su propia forma de lenguaje, como desee. Todo lo que se le exige es que, si desea discutirla, establezca sus métodos claramente, y dé reglas sintácticas en lugar de argumentos filosóficos (Carnap, 1937: 52).

Es decir, que no hay ninguna razón, excepto tal vez de orden pragmático, para elegir un cuadro en lugar de otro. Estamos en libertad de tomar como cuadro sintáctico, por ejemplo, uno en que la matemática esté comprendida de manera trivial en lo que arbitrariamente adoptamos como lógica. En cambio, el proyecto logicista, al proponerse mostrar que la matemática es idéntica que la lógica, o a una parte de ella, supone fijos de antemano los significados de los términos *lógica* y *matemáticas*.

En relación con las matemáticas, hay por lo menos dos interpretaciones del proyecto de Carnap en la SLL. A la primera la denominaremos epistemológica: supone que un problema a resolverse en el libro es el de explicar, esta vez en el sentido ordinario del vocablo, la certeza y el carácter a priori de las matemáticas en el cuadro del empirismo. La solución consistiría en mostrar que las matemáticas derivan de convenciones lingüísticas y carecen, por tanto, de contenido factual. Un fragmento autobiográfico de Carnap (1991: 47) sugiere esta interpretación y varias críticas a la obra han partido de ella. Una es la de Quine en "Truth by Convention" y reposa principal, aunque no únicamente, en un argumento de Lewis Carroll, a saber, que para derivar la infinidad de verdades lógicas de un número finito de convenciones se requiere la lógica. Por ende, ésta no puede ser reducida a un conjunto de convenciones. Gödel supone que el programa desarrollado en la SLL pretende mostrar que la matemática no es descriptiva de un dominio de objetos y que puede ser reducida (o reemplazada) por la sintaxis de un lenguaje. Esta lectura es epistemológica porque Gödel encuentra inaceptable el uso de reglas sintácticas que se refieren a combinaciones de símbolos no dadas "en la intuición sensual inmediata" (Gödel, 1995: 196). Es importante agregar que Gödel atribuye más esta visión de las matemáticas a Hahn y a Schlick que a Carnap (Gödel, 1995, versión II, nota 9). Según esta lectura, el proyecto de la SLL caería con facilidad bajo las críticas de Quine y Gödel.

Otra es la interpretación que llamaremos lógica, según la cual el objetivo de la SLL, en lo que atañe a las matemáticas, es mostrar, como intentaron hacerlo Frege, Russell y Whitehead, la naturaleza de los enunciados de esta disciplina, independientemente de la manera en la cual reconocemos su valor de verdad. La división entre lo analítico y sintético en II reproduciría una distinción esencial entre la lógica y las matemáticas, de un lado, y las otras disciplinas científicas, del otro. ¿Cómo demostraría la obra que existe esta división? Una forma sería probar que hay un criterio sintáctico para determinar la validez de los enunciados matemáticos.

Sobre esta interpretación inciden otras de las críticas de Quine. La más ostensible se basa en los teoremas de incompletud de Gödel. Advirtamos que el uso de procedimientos infinitarios en la caracterización de las matemáticas clásicas, tales como la ω-regla, no es en sí mismo una objeción al proyecto de Carnap, si éste es interpretado en su versión lógica. La crítica de Quine era más general cuando en 1954 se preguntaba por el sentido o la justificación de la distinción analítico sintético (Quine, 1960). Observa que Carnap ha extendido el uso del término sintaxis en el caso del lenguaje II, hasta comprender en él la teoría de conjuntos. Su objeción es entonces que Carnap ha caracterizado los enunciados matemáticos verdaderos en términos del propio vocabulario matemático y para ello ha requerido una matemática necesariamente más poderosa que aquella que se trataba de caracterizar. En efecto, Carnap ha demostrado el lema diagonal para lenguajes como II, del cual se sigue que el concepto "enunciado analítico de II" no es definible en II. Evidentemente los enunciados verdaderos de cualquier disciplina científica pueden caracterizarse sintácticamente utilizando su propio vocabulario. Por tanto, ningún rasgo especial de las matemáticas ha sido señalado y, entonces, éstas no han sido realmente caracterizadas.

El teorema de Gödel ha refutado (al menos aceptando ciertos supuestos) la tesis según la cual las matemáticas son reductibles a la sintaxis (comprendida la palabra *sintaxis* en su acepción actual).[8]

[8] No en la del autor de la SLL, para quien una regla infinitaria puede pertenecer a la sintaxis.

Así, bajo las dos interpretaciones que hemos esbozado, el proyecto de Carnap sucumbe ante los teoremas de incompletud de Gödel que, sin embargo, el autor de la SLL conocía de primera mano. Es necesario entonces interpretar de otra manera su proyecto.

Una interpretación más radical

Hay otra interpretación posible del proyecto de la SLL que no es tan vulnerable a esta crítica, y que parece más fiel a las ideas expresadas por Carnap en otros textos, en particular en ESO. Recordemos que uno de los propósitos de la SLL es mostrar que las tesis tradicionales de la filosofía pueden, en el mejor de los casos, ser explicadas como aserciones sintácticas relativas a lenguajes construidos, o bien como sugerencias para la construcción de cuadros en relación con los cuales resulten verdaderas. Uno podría suponer que ciertas tesis filosóficas o bien subyacen a la puesta en práctica de este programa (por ejemplo, el principio de verificación), o bien son probadas por una de sus aplicaciones concretas (v.gr. un sistema como II habría podido servir para demostrar una de las dos tesis centrales del logicismo). Una interpretación más radical de la obra que analizamos, en consonancia con la neutralidad expresada en ESO y proclamada por el principio de tolerancia, se desprende de algunos de sus fragmentos. En su respuesta a Quine, publicada en el volumen Schilpp, Carnap expresa muy claramente esta última posibilidad:

> Así yo interpretaría, por ejemplo, el principio de verificación (o de confirmación) [the principle of verifiability (or of confirmability)], o el principio empirista de que no hay sintético a priori, como consistiendo de una propuesta para ciertas explicaciones (con frecuencia no establecidas explícitamente) y de ciertas aserciones las cuales, en la base de estas explicaciones, son analíticas (Schilpp, 1991: 917).

Quine llevó al extremo esta idea y sugirió en 1934 que incluso la "tesis" central de la SLL, a saber, que la filosofía es sintaxis, debía ser entendida de la misma manera (Quine, 1990: 66). Según esta lectura, Carnap no sería en 1934 un defensor del logicismo, al menos no en el sentido en que lo fueron Frege, Russell o algunos otros miembros del Círculo de Viena. De acuerdo con ESO y el principio de tolerancia, podemos elegir el cuadro lingüístico de nuestra preferencia y cualquier aserción tendrá sentido y será susceptible de justificación o refutación sólo en relación con ese cuadro. Por ejemplo, la expresión "los enunciados matemáticos son analíticos" es sólo una sugerencia para la construcción de un sistema, tal como II, en que los enunciados de la matemática clásica sean expresables por enunciados analíticos del mismo. Una vez construido II, la expresión anterior deviene una aserción verdadera relativa a II y expresable no en II mismo, pero sí en su metalenguaje o lenguaje sintaxis, como lo llama Carnap. Nada nos impediría en principio construir un lenguaje, digamos III, en el que la expresión "algunos enunciados matemáticos son sintéticos" resultaría una aserción verdadera. La defensa de una tesis relativa al carácter de los enunciados matemáticos expresaría la preferencia por cierto tipo de lenguajes, la cual sólo podría estar fundada en razones de orden pragmático. En la construcción de una sintaxis general, en el capítulo III de la SLL, Carnap parece sugerir que los enunciados lógicos (matemáticos) de un cuadro deben ser analíticos, es decir, deben ser tales que su validez sea determinable a través de las mismas reglas de transformación dadas. En ese sentido, las matemáticas deben formar parte del cuadro mismo, pero ésta es sólo una recomendación (sobre cuya evaluación diremos algo más adelante).

Según esta interpretación, el problema de los fundamentos de la matemática no tiene sentido o es, en el mejor de los casos, una cuestión meramente práctica. Así como Carnap no acepta que el científico contrae un compromiso ontológico al utilizar un lenguaje determinado, tampoco admite que el debate sobre los fundamentos o sobre la naturaleza de los números forme parte del lenguaje teórico. Esta posición es sin duda original, supone que cualquier discusión con sentido se da dentro de un cuadro ya definido, pero las matemáticas (o parte de ellas) pertenecen, por razones de orden práctico, a ese cuadro y son fundamento del sentido, de la creencia y del conocimiento. Los enunciados matemáticos no son entonces ni verdaderos ni falsos, ni susceptibles de creencia.

Nótese que estamos aplicando las ideas de ESO a todo tipo de cuestiones y no exclusivamente a las ontológicas. Desde luego el proyecto ya citado de disponer de un solo lenguaje para toda la ciencia, fuera del cual ninguna expresión tendría sentido, resulta insostenible después de los resultados de Gödel. ESO admitía como válidas sólo las cuestiones internas, pero además de las afirmaciones expresadas en el cuadro hay importantes aserciones sintácticas (en el sentido que esta palabra tiene en la SLL) relativas a él y que son expresables únicamente en su metalenguaje. Aquí surge un problema serio para replantear el proyecto de Carnap. Tomemos un cuadro L cualquiera. ¿Debemos eliminar las expresiones metalingüísticas no expresables en L? Aparentemente no, pues son demostrables a partir de las reglas sintácticas que lo constituyen, pero lo son gracias a una matemática no expresable en L mismo. Evidentemente suponer que hay una sucesión infinita de cuadros, cada uno más poderoso en medios de expresión que el anterior, arruinaría el proyecto de ESO, en la medida en que éste supone el establecimiento de reglas bien definidas para la formulación de cuestiones. Tal vez la solución consistiría en tomar un lenguaje casi universal, digamos II, y renunciar a la parte de su sintaxis inexpresable en él. Por ejemplo, sería válido decir que si II es consistente, entonces el enunciado de Gödel es irresoluble, pues esta aserción es expresable en II. En cambio, tendríamos que renunciar a hablar de consecuencia o de"analiticidad" en II porque son conceptos inexpresables en II. Sólo sería posible aplicarlos a sublenguajes de II.

Otra posibilidad, más acorde con los resultados de Carnap, es la renuncia a un lenguaje universal o a una única jerarquía de lenguajes. Según ésta no habría un solo fundamento de las ciencias, sino que cada científico estaría en libertad de elegir un cuadro lingüístico que provea de sentido a sus afirmaciones futuras. Las matemáticas que él emplee podrán formar parte de su cuadro y serán anteriores a todas sus afirmaciones. Si quiere estudiar la sintaxis de ese lenguaje tendrá que construir un nuevo cuadro que provea de sentido a sus afirmaciones. Para emplear un símil de Wittgenstein, los enunciados matemáticos serán expresión de las reglas del juego, no tiradas en el mismo. Hemos sugerido que la elección de un cuadro puede ser evaluada según la capacidad que éste tiene para ofrecer explicaciones adecuadas de conceptos científicos y la posibilidad de su sintaxis para convertir en cuasi-sintácticos enunciados filosóficos, pero esta última es secundaria, pues si se reconoce el carácter no enunciativo sino sólo sugerente de las supuestas tesis filosóficas, éstas no tienen por qué preocuparnos. Por ejemplo, según Quine, la decisión sintáctica de clasificar los enunciados matemáticos formalizables en un sistema como analíticos es preferible a la de catalogar algunos de ellos como sintéticos, pues

> ...tiene la importancia de capacitarnos a perseguir los fundamentos de las matemáticas... sin encontrar cuestiones extralógicas como la fuente de validez de nuestros juicios a priori... Finalmente, la doctrina de que lo a priori es analítico *gana* en fuerza por así resultar ser una materia de convención sintáctica; pues de ese modo se previene la objeción de que nuestra exclusión de las dificultades metafísicas de lo sintético a priori depende de nuestra adopción de un punto de vista metafísico a su vez gratuito (Quine, 1990: 66).

Carnap frente al logicismo y al formalismo

Intentemos ahora situar la posición de Carnap frente al logicismo y al formalismo. Del primero, hemos visto cómo Carnap resume sus objetivos matemáticos eludiendo toda alusión metafísica (todo lo contrario a Frege o a Russell). Aparentemente él pensaba que los dos objetivos del logicismo habían sido logrados hasta un grado satisfactorio y que la decisión sintáctica de definir como lógicos (y, por lo tanto como analíticos, según la sintaxis general desarrollada en el capítulo IV de la SLL) los enunciados matemáticos en el sistema era conveniente. Para ello podría haber dado tres razones: era una decisión a) que incorporaba los avances logrados por los logicistas; b) que no sugería las espinosas cuestiones metafísicas sobre el origen de nuestros juicios sintéticos a priori; c) que reflejaba con bastante fidelidad la distinción entre los enunciados de la ciencia sometidos a constantes revisiones y los de la matemática, que permanecen fijos y sirven para vincular los enunciados teóricos y los de observación. Recordemos que Carnap estaba interesado en las matemáticas en tanto que útiles en la predicción científica y no en cuanto disciplina independiente. Prueba de ello es que la refutación del segundo dogma del empirismo le fue sugerido a Quine por la lectura del *Aufbau*:

> Mi objeción [*countersuggestion*], resultando esencialmente de la doctrina de Carnap en el *Aufbau* del mundo físico, es que nuestros enunciados acerca del mundo externo enfrentan el tribunal de la experiencia no individualmente sino sólo como un todo organizado [*as a corporate body*] (Quine, 1951: 41).

Es decir, para Carnap la distinción analítico-sintética corresponde[9] a una dualidad del lenguaje científico, el cual permanece sin alteración durante cierto periodo. En efecto, algunos elementos de la teoría deben quedar fijos en el momento de la verificación empírica, mientras que otros son puestos a prueba. Por ejemplo, ordinariamente, someter a prueba una hipótesis biológica no solamente no pone en cuestión la aritmética, sino que la supone. Los enunciados analíticos permanecerán fijos hasta el final del experimento y durante un cierto tiempo. En efecto, el científico puede modificar uno de estos enunciados después de la refutación, pero entonces, según Carnap, ha cambiado de lenguaje (Schilpp, 1991: 921). El científico no ha falsificado los enunciados analíticos de su lenguaje original; ha elegido un lenguaje nuevo.[10]

[9] Si bien la introducción de dicha distinción en estudios lingüísticos no requiere ninguna justificación teórica, resulta imprescindible desde un punto de vista práctico. Véase su respuesta a Quine en Schilpp (1991: 919), y en Carnap (1955: 34-47).

[10] Concuerdo con Silvio Pinto en que esta respuesta de Carnap no lo pone al abrigo de la crítica de Quine, sino que sólo traslada la dificultad, como lo explico en *Quine y la ontología abstracta*. Mi objetivo aquí era únicamente conjeturar cuáles podrían haber sido las razones de Carnap para, a pesar de mantener una actitud neutra con respecto a ciertas tesis filosóficas, afirmar las principales tesis del logicismo en la época de la SLL.

[11] Véase el citado volumen de Schilpp, p. 917.

Situemos ahora la SLL con respecto al formalismo. Si eliminamos también las alusiones "metafísicas" del programa formalista, éste queda reducido a las siguientes operaciones: a) en primer término, vaciar por completo el contenido de la matemática y, en particular, el de la aritmética, dentro de sistemas axiomáticos formalizados, en los que estuviesen especificados los símbolos a usarse y su sintaxis, las fórmulas que son axiomas y las reglas de derivación de teoremas; estos sistemas incluirán una formalización de la lógica clásica; b) dado que un sistema axiomático formal está constituido por expresiones sometidas a reglas de combinatoria precisas, probar por métodos exclusivamente finitarios y constructivos su consistencia, es decir, que una fórmula no es derivable de los axiomas dados. Agreguemos el siguiente principio ontológico que Hilbert parece asumir: c) los objetos de los que trata un sistema axiomático formal S son definidos por los axiomas y reglas de inferencia de S y existen si S es consistente.

En este sentido, Carnap va un paso más allá de Hilbert en respuesta a los teoremas de Gödel, por las siguientes razones:

1) Frente a la crítica de Quine en "Truth by Convention", Carnap acepta que la lógica es injustificable, o que los intentos de justificar una lógica conducen a circularidades. En efecto, cuando Quine muestra que, una vez analizada, la idea de *verdad por convención*, se reduce a una trivialidad como "0=0", Carnap está de acuerdo.[11] Por ello propone, a diferencia de Hilbert, pero en el mismo espíritu de liberar al científico de las imposiciones inspiradas por principios ajenos a su trabajo, el principio de tolerancia. Cualquier lógica puede ser elegida en la "fundamentación" del conocimiento.
2) Creemos que para Carnap el principio ontológico que Hilbert asume, relativo a que los objetos de los que trata un sistema axiomático formal S son definidos por los axiomas y reglas de inferencia de S y existen si S es consistente, sería una explicación bastante satisfactoria de lo que el matemático entiende por "existencia" y, así entendido, pierde su carácter metafísico.
3) Carnap sustituye ahí la idea de consistencia por aquella más específica, pero a su vez más imprecisa, de utilidad del sistema (para los fines del investigador que lo propone).

De esta manera, el proyecto presentado en la SLL se inscribe en la "postgödelinanidad": retoma ideas centrales del logicismo y el formalismo, pero las desliga de todo proyecto metafísico o epistemológico, en favor de una concepción novedosa de los fundamentos. Es cierto que Carnap se dio cuenta muy pronto de que la restricción a la sintaxis era innecesaria y propuso como cuadros, bajo la influencia de Tarski, sistemas semánticos.

Bibliografía

Benacerraf, Paul, y Hilary Putnam, eds.
1983 *Philosophy of Mathematics,* Cambridge University Press [1964].

Carnap, Rudolf
1931 "Die logizistiche Grundlegun der Mathematik", en *Erkenntnis* núm. 2 [traducción inglesa: "The logicist foundation of mathematics", en Benacerraf, P. y H. Putnam, eds., *Philosophy of Mathematics,* Cambridge University Press, 1983] .
1937 *The Logical Syntax of Language,* Harcourt Brace, Londres y Nueva York.
1950 "Empirism, Semantics, and Ontology", en *Revue Internationale de Philosophie,* núm. 11, pp. 20-40.
1955 "Meaning and synonymy in natural languages", en *Philosophical Studies,* núm. 7, pp. 33-47.
1991 "Autobiography", en P. A. Schilpp, ed., *The Philosophy of Rudolf Carnap,* La Salle, Open Court [1963].
1996 *Philosophy and Logical Syntax,* Thoemmes Press [1935].

Gödel, Kurt
1995 "Is Mathematics syntax of language" versiones II y IV, en *Kurt Gödel: Unpublished Philosophical Essays,* editados por Francisco Rodríguez-Consuegra, Birkhäuser Verlag, Bassel, Boston, Berlín.

Quine, Willard van Orman
1951 "Two dogmas of empiricism", en *Philosophical Review,* núm. 60, pp. 20-43 [reimpreso en W. V. O. Quine, *From a Logical Point of View,* Harvard University Press, segunda edición revisada, 1980].
1960 "Carnap and logical truth", en *Synthese,* núm. 12.
1990 "Lectures on Carnap", en R. Creath, ed., *Dear Carnap, Dear Van. The Quine-Carnap Correspondance and Related Work,* University of California Press, Berkeley.

Schilpp, Paul Arthur, ed.
1991 *The Philosophy of Rudolf Carnap,* La Salle, Open Court [1963].