La generalización y la formalización en matemáticas: el caso de las series

IZTAPALAPA
Agua sobre lajas

*Juan José Rivaud M.**

Resumen: El propósito de este trabajo es mostrar, a través del estudio de un caso concreto (el de las series de números reales), cómo se dan y relacionan, en el quehacer matemático, la generalización y la formalización. Mostrar que el empleo de métodos sintácticos, más allá del dominio en que estaban originalmente justificados, jugó un papel no sólo heurístico en la obtención de nuevos resultados, sino fundamental en la constitución de conceptos más generales.
Palabras clave: generalización, matemáticas, cálculo, series.

Introducción

El propósito de este trabajo es mostrar, a través del estudio de un caso concreto (el de las series de números reales), cómo se dan y relacionan, en el quehacer matemático, la generalización y la formalización, discusión que, consideramos, no está agotada.** Cabe aclarar que, aunque se sigue el desarrollo del problema en el tiempo, no se trata de un estudio histórico, sino de un análisis epistémico de los cambios conceptuales involucrados en la construcción de la teoría.

* Profesor investigador del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. En licencia sabática del Cinvestav, Instituto Politécnico Nacional. jrivaud@mail.cinvestav.mx
** El autor quiere expresar su agradecimiento al doctor Axel Barceló, del Instituto de Investigaciones Filosóficas de la Universidad Nacional Autónoma de México, y al doctor Gerardo Hernández, de la sección de Metodología y Teoría de la Ciencia del Cinvestav del IPN por sus comentarios y sugerencias.

Fecha de recepción 07/05/03, fecha de aprobación 01/12/03

El tema de las series permite mostrar con claridad algunas particularidades de la construcción del conocimiento matemático. Por ejemplo, que el estudio de un caso específico no es necesariamente el punto de partida de la inducción, sino una manera de abordar el caso general, que nos hace ver la estructura de la argumentación y el papel de cada hipótesis en ella. También nos muestra las dificultades que se presentan cuando se pretende poner en forma abstracta una idea que es usada una y otra vez en ejemplos particulares.

Otro elemento que el tema pone de manifiesto es cómo la generalización permite, en el desarrollo de la teoría, que coexistan, sin mayor conflicto, dos ideas diferentes e, incluso, contradictorias; y cómo, en contraste, la formalización puede borrar todas las huellas de las conceptualizaciones previas y reducirlas, en el mejor de los casos, a *argumentos heurísticos.*

El término *generalización* es usado en matemáticas en distintos contextos y con diferentes significados, pero nosotros nos referiremos a él en el sentido que a continuación precisamos. Por generalización entendemos el ampliar la clase de objetos sobre los que trata una teoría y modificar los conceptos y resultados de tal forma que se apliquen a la nueva clase, con la condición de que, al restringirse a los objetos originales, formalmente no se hayan producido cambios. Esta generalización puede darse de manera "natural" (producto del desarrollo de la teoría o del contacto con nuevos temas) o llevarse a cabo con el propósito de recuperar resultados eliminados por la formalización. Si bien ampliar la clase de objetos a los que se aplica un concepto representa una ganancia, también se producen pérdidas, pues algunas propiedades que comparten los elementos de la teoría inicial no las poseen todos los nuevos elementos. Qué es lo que se pierde y qué es lo que se gana es central para decidir, en un momento dado, si la generalización es adecuada o no. Dentro de la formalización, una manera usual de conseguir la generalización es usar una propiedad de los elementos de la teoría inicial, pero que no los caracterice, y ampliar la teoría a la clase de los elementos que cumplen dicha propiedad; en la última parte del trabajo, los ejemplos aclaran este punto.

Otro aspecto que vale la pena mencionar es cómo, en algunas ocasiones, la generalización se vuelve un instrumento de búsqueda y análisis, que es usado conscientemente en el desarrollo de la teoría.

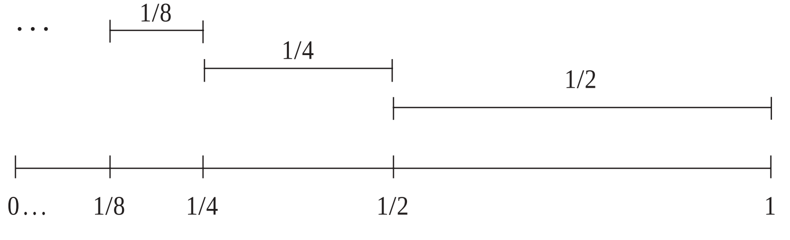
Las series son uno de los temas de las matemáticas que mejor reflejan el significado de la generalización. Nosotros sólo tratamos con series de números reales, pero los casos de series de puntos de R^n o de un espacio de Banach son también ilustrativos.

Los orígenes: series de números positivos

Las primeras series que aparecieron en la historia no tenían sumandos negativos. Esto permitió verlas como sumas con una infinidad de términos, pero sumas al fin y al cabo; por ello no existía preocupación por el orden en el que aparecían los sumandos, pues éste es producto de que hablamos o escribimos de forma lineal, sin considerar todos los sumandos a un tiempo, como lo hacemos al pensar en la suma, que es el agregado de todos ellos. Los términos de una suma, finita o no, los podemos imaginar como el peso de un trozo de un material homogéneo; la suma será el peso (finito o no) de todos los trozos juntos y en esa agregación no hay ningún orden preestablecido. Esta situación es similar a la que se presenta cuando, para calcular su área, expresamos una figura, por ejemplo un círculo o un segmento de parábola, como la unión de una familia infinita de triángulos. En la colección de triángulos no hay un orden, nosotros lo establecemos para poder solucionar el problema.

Pensando en las series como "sumas" tampoco se requiere el concepto de límite, excepto en algunos casos, cuando el cálculo de la suma de la serie se efectúa usando los resultados parciales. Pero en este caso la idea de límite no es usada en general, sino en cada ejemplo, lo que deja oculto su significado abstracto, que es obviado por el contexto del ejemplo mismo. La suma $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ... = 1$ nos proporciona un buen ejemplo de ello, cuando, para encontrar su valor la asociamos al segmento [0,1] partido en dos partes iguales, de las cuales la primera está a su vez dividida de la misma manera y así sucesivamente (figura 1).

Figura 1



Otro caso de naturaleza análoga, lo tenemos con la suma de la serie de los recíprocos de los números naturales (la serie armónica):

$$1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + ...$$

Si agrupamos los sumandos como se indica: 1/2, 1/3 + 1/4 (>1/2), 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 (>1/2), y así sucesivamente, nos convencemos que la suma es infinito. Con más detalle, cada segmento tiene el doble de términos que el anterior y la suma correspondiente es mayor que 1/2; como hay una infinidad de tales segmentos, la suma de la serie es infinito.

La generalización: los primeros pasos

Cuando se empezaron a estudiar series con términos positivos y negativos, este acercamiento tuvo que cambiar y lo hizo en forma natural, recurriendo a los elementos mismos que indujeron la generalización. Con el advenimiento del álgebra aparecieron expresiones algebraicas infinitas que, al evaluarlas formalmente en un número, dan como resultado tales series, así como su suma. Por ejemplo, al efectuar la siguiente división, tenemos:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1 - x + x^2 - \ldots \\ \hline
1 + x & 1 \\
 & \underline{-1 - x} \\
 & \quad -x \\
 & \quad \underline{-x + x^2} \\
 & \qquad\quad x^2 \ldots
\end{array}
$$

Que, en forma más breve, la expresamos:

$$1/1 + x = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots \quad (*)$$

Ahora bien, al sustituir, en el lado derecho de la igualdad, x por 1/2, obtenemos la serie:

$$1 - 1/2 + 1/4 - 1/8 + 1/16 - \ldots$$

Y haciendo lo mismo en el lado izquierdo, tenemos: 1/(1 + 1/2) = 2/3, que es el valor correcto de la suma de la serie.

El ejemplo anterior muestra no solamente cómo el manejo libre de los procedimientos algebraicos da lugar a la aparición de las series con signo, sino también a ideas y procedimientos nuevos de cómo realizar sus sumas, usando las igualdades y relaciones algebraicas sin cortapisas.

Este acercamiento se amplía y fortalece al hacer uso de las ideas y resultados del cálculo diferencial e integral y sus antecedentes. Como ilustración de ello tenemos la serie armónica alternante: $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots$ cuya suma probaremos que es Ln2. Para convencernos de ello integramos la expresión algebraica (*):

$$\int (1/1 + x)dx = \int (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots)dx$$

obteniendo:

$$Ln(x) = \int (1/1 + x)dx = \int (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots)dx = \int dx - \int x\,dx + \int x^2 dx - \int x^3 dx + \ldots$$

Y, calculando estas integrales entre 0 y 1, tenemos: $Ln2 = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - \ldots$, como habíamos anunciado.

Podríamos pensar que una manera de extender directamente a estas nuevas series el marco conceptual descrito al inicio, sería considerar, por un lado, la suma de los términos positivos y, por otro, la suma de los términos negativos y calcular la diferencia de ambos resultados, lo cual, siempre y cuando no sean ambas infinito, nos da la respuesta correcta. Cuando tanto la suma de los términos positivos como de los negativos es infinito, este acercamiento no nos proporciona ningún criterio para asignarle un valor a la suma de la serie. Este punto nos indica que los nuevos métodos constituyen efectivamente una ampliación no trivial de la teoría.

La serie armónica alternante ilustra la situación anterior: la suma de los términos positivos es mayor o igual que la suma de los negativos, pues cada sumando con signo positivo es mayor que el correspondiente con signo negativo: $1>1/2$, $1/3>1/4$, $1/5>1/6, \ldots$ Asimismo, la suma de los términos negativos es infinito, pues sus sumandos son la mitad de los de la serie armónica; por lo tanto, las dos sumas son infinito. Además, nos permite ver otros fenómenos importantes.

Como sabemos:

$$Ln2 = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + 1/9 - \ldots$$

Ahora consideremos esta serie dividida entre dos (por lo tanto con suma igual a 1/2Ln2) y en la que, como se muestra a continuación, hemos agregado un cero antes de cada sumando:

$$1/2Ln2 = 0 + 1/2 + 0 - 1/4 + 0 + 1/6 + 0 - 1/8 + 0 + 1/10 - \ldots$$

Sumando término a término ambas series obtenemos:

$$3/2\mathrm{Ln}2 = 1 + 1/3 - 1/2 + 1/5 + 1/7 - 1/4 + 1/9 + \ldots$$

serie cuya suma es 3/2 de la armónica alternante, pero que tiene los mismos sumandos que ésta, aunque en otro orden (ahora aparecen dos sumandos positivos por cada negativo). Lo anterior nos señala un nuevo fenómeno: al cambiar el orden de los sumandos, la suma puede ser alterada.

Pero el "orden" no estaba en la suma, sino en la manera de presentar ésta al hablar o escribir, situación paradójica, que sólo la existencia de Dios explicaba. Para nosotros constituye un ejemplo de cómo al generalizar y, por lo tanto, ampliar la familia de objetos estudiados, se pierden propiedades y aparecen nuevos problemas.

Históricamente, el resultado anterior causó asombro y dificultades, pero no provocó ninguna crisis ni tampoco el abandono de los nuevos métodos; más aún, éstos siguieron desarrollándose y usándose con éxito por muchas décadas, y dieron lugar a situaciones sorprendentes. Tal es el caso de la serie $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ de la cual Leibniz, al igual que Euler, no dudaba en afirmar que su suma era 1/2. Una justificación de ello era que, al sustituir 1 por x, del lado derecho de la igualdad (*) obtenemos la serie en cuestión, pero del izquierdo tenemos $1/1 + 1 = 1/2$.

Por supuesto que este manejo de las series tuvo sus excesos y dio lugar a resultados sin sentido. Uno de ellos se da cuando evaluamos ambos lados de (*) en $x = -2$, y se obtiene: $-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$ Pero éste no es el caso de Euler, quien de esta manera obtuvo una cantidad considerable de resultados y resolvió numerosos problemas, que en el proceso de formalización se deseó preservar, lo que dio lugar a profundas generalizaciones. Los resultados antes mencionados son centrales en la teoría de la convergencia de series de Fourier, en particular, al analizar lo que pasa en los puntos de discontinuidad de la función desarrollada; un ejemplo es el teorema de Fejer que afirma: *Si f es periódica, de periodo 1 e integrable en (0,1), y x_0 es tal que los límites*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0^-) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$$

existen, entonces la serie de Fourier de f en x_0 es (C–1)–sumable y su suma es

$$1/2\,(f(x_0^+) + f(x_0^-)).$$

A pesar de que Euler no da alguna pista, su trabajo nos hace sospechar que sus ideas al respecto no son nada triviales. El tema se siguió trabajando con intensidad hasta las primeras décadas del siglo xx, como lo muestra la obra *Divergent Series*, de Hardy (1949).

La formalización

Cuando a finales del siglo xviii y en la primera mitad del xix se planteó la reconstrucción del cálculo al margen de toda intuición física o geométrica, es decir, su formalización, una gran cantidad de conceptos fueron reelaborados, en particular el de suma de una serie; para ello se recurrió al concepto de límite de una sucesión (que, como antes señalamos, era usado, en casos particulares, en el proceso del cálculo de la suma). Así pues, la suma de una serie pasó a ser el *límite de la sucesión de sus sumas parciales,* sucesión que tomó en cuenta el orden de los sumandos y, por lo tanto, transformó en problema la paradójica situación de la no conmutatividad. Más tarde Riemann proporcionó resultados centrales para entender este fenómeno; ejemplo de ello es el teorema que afirma que: si tenemos una serie convergente, pero tal que la serie de los valores absolutos es divergente, entonces, dado un número, existe un reordenamiento que hace que la serie converja a él. Durante el siglo xx aparecieron más resultados significativos al respecto.

Otra consecuencia de la conceptualización anterior es que los argumentos algebraicos mencionados pierden todo sentido, excepto su carácter heurístico. Sin embargo, en distintas áreas, como el análisis armónico (series de Fourier), los resultados obtenidos a través de su uso eran válidos e importantes y resultaba imprescindible recuperarlos; para lo cual, después de un estudio minucioso del uso de estas series en el desarrollo de los argumentos, se propusieron generalizaciones de la definición de serie convergente, así como de su suma, conocidas como criterios de sumabilidad, entre los que destacan el llamado criterio de Abel y los de Cesàro, que a continuación discutiremos.

La generalización despúes de la formalización

Si tenemos una serie convergente $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ cuya suma es s, y consideramos la serie de potencias $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$, entonces, para toda x con valor absoluto menor que 1, ésta es convergente a un número, que llamaremos f(x), y el límite de f(x), cuando x tiende a 1, existe y es precisamente s. El recíproco no es válido, como lo muestra la serie $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$, que no es convergente, pero para la cual, la serie de potencias asociada: $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = 1/1 - x$ (para $|x|<1$), tiende a 1/2, cuando x tiende a 1; a este límite se le llama la suma de esta serie, en el sentido de Abel, y este valor coincide con el que Leibniz y Euler le asociaban. En general, decimos que una serie $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ suma s en el sentido de Abel si la función f(x) dada por la serie $f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$ está definida para $0<x<1$ y el límite, cuando x tiende a 1, de f(x) existe y es igual a s.

La sumabilidad en el sentido de Cesàro se basa en que cuando tenemos una sucesión $a_1, a_2, a_3,\ldots$ que converge a L, la sucesión de sus promedios $a_1, (a_1 + a_2)/2, (a_1 + a_2 + a_3)/3,\ldots$ también converge a L. Decimos que la sucesión $a_1, a_2, a_3,\ldots$ converge en el sentido de Cesàro a L, si la sucesión de sus promedios $a_1, (a_1 + a_2)/2, (a_1 + a_2 + a_3)/3,\ldots$ lo hace. Decimos que la serie $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ tiene por suma de Cesàro de primer orden a s, si la sucesión de sumas parciales converge en el sentido de Cesàro a s. La sumabilidad de Cesàro de orden superior se define en forma análoga. No lo demostraremos, pero la convergencia de Cesàro, de cualquier orden, implica la de Abel (véase Hardy, 1949: 108, teoremas 55 y 56).

La serie $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ también es sumable en el sentido de Cesàro y su suma es 1/2. Para comprobarlo aplicamos en forma directa la definición. La sucesión de sus sumas parciales es 1, 0, 1, 0, 1,… Y la sucesión de los promedios es 1, 1/2, 2/3, 1/2, 3/5,… que tiende a 1/2, pues los términos de orden par son 1/2, y los de orden impar tienen la forma $(n + 1)/2n$.

Como apuntamos en la introdución, la sumabilidad en el sentido de Abel o de Cesàro ejemplifican perfectamente cómo se consigue la generalización formal. A continuación veremos que hay propiedades que se pierden.

Al efectuar la división $(1 + x)/(1 + x + x^2)$ de la misma manera que en el caso$1/1 + x$, tenemos que:

$$(1 + x)/(1 + x + x^2) = 1 + 0x - x^2 + x^3 + 0x^4 - x^5 + x^6 + \ldots$$

Que al sustituir $x = 1$, en ambos lados de la expresión anterior, nos da:

$$2/3 = 1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + 1 + 0 - \ldots$$

que dice que la suma de Abel de la serie de la derecha es 2/3 (en el sentido de Cesàro es lo mismo y se ve aplicando directamente la definición). Lo que en apariencia está en contradicción con el hecho mencionado al principio de este apartado, que afirma que la suma de Abel de la serie $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$ es 1/2, pues ambas series tienen los mismos sumandos, excepto por los ceros. Aquí está la explicación: cuando hablamos de sumabilidad de Abel (o de Cesàro) no podemos ignorar los ceros que aparecen como sumandos. Por lo tanto, dentro del nuevo marco proporcionado por la generalización, argumentos como el usado en la construcción del ejemplo de la no conmutatibidad tienen que usarse con mucho cuidado.

Bibliografía

Hardy, G. H.
1949 *Divergent Series*, Chelsea Publishing Company, Nueva York.
Stromberg, K. R.
1981 *An Introduction to Classical Real Analysis,* Wadsworth International Group, Belmont, Co.